АРТИЛЛЕРИЙСКАЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКАЯ
ОРДЕНА ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЫ
АКАДЕМИЯ СОВЕТСКОЙ АРМИИ
имени Маршала Советского Союза ГОВОРОВА Л. А.

В. М. КИРЬЯНОВА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ)

1964

АРТИЛЛЕРИЙСКАЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКАЯ
ОРДЕНА ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЫ
АКАДЕМИЯ СОВЕТСКОЙ АРМИИ
имени Маршала Советского Союза ГОВОРОВА Л. А.

В. М. КИРЬЯНОВА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ)

1964

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие возникло на основе курса лекций.

В конце каждого параграфа имеются вопросы для самоконтроля, задачи и примеры.

Автор выражает глубокую признательность Н. С. Ландкофу и И. В. Сухаревскому, сделавшим много полезных замечаний, которые способствовали улучшению книги.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ.

ПРЕДЕЛ КОМПЛЕКСНОЙ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

1. Теория функций комплексного переменного является продолжением анализа функций вещественного переменного. В этой теории как функция, так и аргумент принимают комплексные значения. Отметим, что основные понятия теории функций комплексного аргумента являются непосредственным обобщением соответствующих понятий теории функций действительного переменного. Глубокая аналогия в основных определениях влечет за собой столь же глубокую аналогию во многих теоремах. Однако в теории функций комплексного переменного многие методы и многие теоремы не имеют аналога в вещественной области.

Комплексные числа $z=x+iy$ будем интерпретировать как точки комплексной плоскости.

Определение 1. Окрестностью точки z_0 назовем всю совокупность точек, попадающих в круг некоторого радиуса δ с центром в точке z_0. Это значит, что окрестность точки z_0 радиуса δ составляют все точки z, удовлетворяющие неравенству $|z-z_0|<\delta$. (рис. 1).*

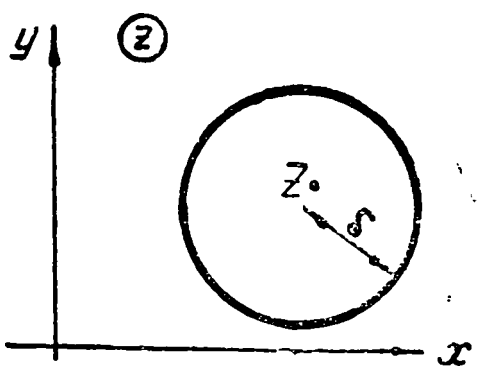

Рис. 1

II. Предел комплексной числовой последовательности.

Введем определение предела для последовательности комплексных чисел.

Определение 2. Комплексное число c называется пределом последовательности комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, если абсолютная величина разности $|z_n-c|$ стремится к нулю с ростом номера n, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-c|=0$. Записывается это так

$$\lim_{n\to\infty} z_n=c.$$

---

* На рис. 1 символ z есть обозначение комплексной плоскости.

В этом случае говорят, что последовательность $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ сходится к c.

Так как абсолютная величина разности $|z_n - c|$ есть вещественное число, то определение предела для комплексной последовательности сведено к определению предела для вещественной последовательности.

Стремление к нулю модуля разности $|z_n - c|$ означает, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$|z_n - c| < \varepsilon$$

при всех достаточно больших n. Следовательно, при достаточно больших n элементы последовательности z_n попадают в ε—окрестность точки c (рис. 2).

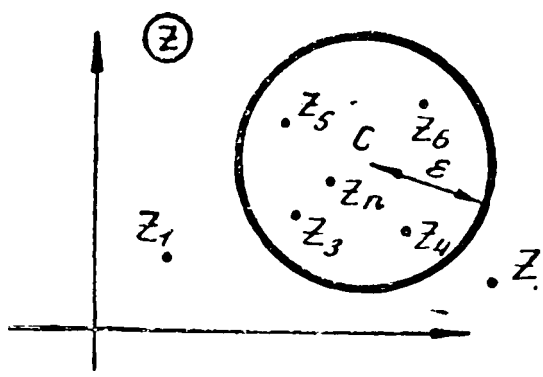

Рис. 2

Пример 1.1. Рассмотрим последовательность

$$1+i, \frac{1}{2}+\frac{i}{2}, \frac{1}{4}+\frac{i}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}+\frac{i}{2^n}, \ldots$$

Пределом данной последовательности является нуль. Действительно,

$$\left|\frac{1}{2^n}+\frac{i}{2^n}-0\right| = \frac{1}{2^n}\left|1+i\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2^n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Известно, что каждое комплексное число определяется парой вещественных чисел $z = x + iy$. Поэтому одна последовательность комплексных чисел порождает две вещественные последовательности

$$\{x_n = \mathrm{Re}\, z_n\} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\{y_n = \mathrm{Im}\, z_n\} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Оказывается, имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Предел последовательности $\{z_n\}$ существует в том и только в том случае, если существуют пределы последовательностей вещественных частей $\{x_n\}$ и мнимых частей $\{y_n\}$ чисел z_n.*

Причем

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство. 1) Пусть существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = в$$

и пусть $c = a + iв$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - c| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - в)^2} = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c.$$

2) Пусть существует

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c = a + iв.$$

Тогда из неравенств

$$|x_n - a| \leqslant |z_n - c|,$$

$$|y_n - в| \leqslant |z_n - c|$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - a| = \lim_{n\to\infty} |y_n - в| = 0,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \lim_{n\to\infty} y_n = в.$$

Замечание. Можно показать, что если

$$\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0,$$

то существуют пределы последовательностей $\{|z_n|\}$ и $\{\arg z_n\}$.

Верно и обратное, т. е. из существования

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \arg z_n$$

следует существование $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, то последовательность $\{\arg z_n\}$ не обязана иметь предел; однако, необходимым и достаточным условием этого случая является равенство

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0.$$

III. Числовые ряды в комплексной плоскости

Пусть дана последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ составим новую последовательность так называемых частичных сумм

$$S_1 = z_1$$
$$S_2 = z_1 + z_2$$
$$S_3 = z_1 + z_2 + z_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Эта последовательность обозначается символом бесконечной суммы

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

и называется *рядом*.

Определение 3. Если при бесконечном возрастании n величина S_n стремится к пределу,

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

то, говорят, что бесконечный ряд

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

сходится и имеет сумму S

$$S = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

Если же S_n не стремится к пределу, то бесконечный ряд *расходится*.

Лемма 2. Существование суммы S комплексного числового ряда эквивалентно существованию сумм у ряда, составленного из вещественных частей и у ряда, составленного из мнимых частей членов исходного ряда. Причем $S = u + iv$, где

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad v = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

Доказательство. Возьмем частичную сумму S_n рассматриваемого ряда и преобразуем ее

$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + i(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = u_n + iv_n.$$

Таким образом доказательство леммы сведено к использованию леммы 1.

Как и в случае вещественных рядов, для рядов с комплексными членами вводится понятие об абсолютной сходимости ряда. Предположим, что сходится ряд, составленный из модулей членов некоторого комплексного ряда $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$, т. е. сходится вещественный знакоположительный ряд

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots.$$

Это значит, что его частичные суммы ограничены при всех n

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| < M$$

(M — некоторая константа)

Но так как

$$|x_k| \leqslant |z_k|,$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| < M.$$

Отсюда вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$, а значит, и ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$*.

По этой же причине сходится ряд

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Тем самым доказана сходимость ряда

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

Итак, нами получен следующий результат.

Лемма 3. Если сходится ряд, составленный из модулей членов некоторого ряда, то и сам ряд сходится.

Пример 1.2. Выясним вопрос о сходимости ряда

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{i}{3}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{i}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3^n} + \frac{i}{3^n}\right) + \ldots$$

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда. Мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{3^n}$$

Этот ряд сходится, значит данный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{i}{3^n}\right)$$

сходится абсолютно.

---

* Напомним, что ограниченность частичных сумм является необходимым и достаточным условием для сходимости знакоположительного ряда.

Определение 4. Если сходится ряд, составленный из модулей членов [illegible] ряда, то [illegible] ряд называется абсолютно сходящимся.

Замечание. Необходимо отметить, что из сходимости ряда 2r5 абсолютная сходимость, вообще говоря, не следует.

Пример 1.3. Выяснить вопрос о сходимости ряда

$$\left(\frac{1}{2}+i\right)+\left(\frac{1}{4}-i\,\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+(-1)^{n-1}i\,\frac{1}{n}\right)+\ldots$$

Ряд, составленный из вещественных частей

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,\ \text{сходится.}$$

Ряд, составленный из мнимых частей $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-$ $-\ldots(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$, также сходится, следовательно, исходный ряд сходится. Однако абсолютной сходимости нет, так как

$$\left|\frac{1}{2^n}+(-1)^{n-1}i\,\frac{1}{n}\right|>\frac{1}{n},$$

а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Вопросы и задачи

I. Повторение материала из теории комплексных чисел *.

1. Какие комплексные числа называются равными?
2. Как определяются действия сложения, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме?
3. Что такое модуль комплексного числа?
4. Где расположены точки z, для которых

а) $|z|>5$,

б) $|z-i|<3$,

в) $|z+2i|\geqslant 2$,

г) $|z-4+5i|=5$,

д) $\operatorname{Re} z>3$,

е) $\operatorname{Im} z\leqslant 4$,

ж) $2<|z|<4$.

---

* Литература для повторения:

а) *Балтага В. К.* «Комплексные числа». АРТА, 1956 г.

б) *Киселев.* Алгебра, ч. II.

5. Что такое аргумент комплексного числа?

6. Где расположены точки z, для которых

$$\text{а)}\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{б)}\ \arg(z-i) = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{в)}\ \frac{\pi}{6} < \arg(z+2i) < \frac{\pi}{2}.$$

7. Как производится умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме? В показательной форме?

8. Найти: а) $(1+i\sqrt{3})^3$; б) $(\sqrt{3}-i)^5$.

II. Предел числовой последовательности. Числовые ряды в комплексной плоскости.

1. Сформулируйте определение окрестности точки.

2. Записать с помощью неравенства окрестность точки i радиуса 5, показать соответствующую область на рисунке.

3. Дать определение сходящейся последовательности комплексных чисел.

4. Показать, что, если сходится последовательность модулей

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = r$$

и последовательность аргументов

$$\lim_{n\to\infty} \arg \varphi_n = \varphi,$$

то сходится последовательность

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

причем

$$\lim_{n\to\infty} z_n = re^{i\varphi}.$$

5. Сформулировать определение сходящегося ряда.

6. В какой взаимосвязи находятся понятия сходимости и абсолютной сходимости ряда?

7. Проанализировать, на каких теоремах из математического анализа основано доказательство леммы о связи сходимости и абсолютной сходимости ряда.

8. Выяснить вопрос о сходимости рядов

$$\text{а)}\ (1+i)+\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+i\frac{1}{n}\right)+\ldots;$$

$$\text{б)}\ \left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n+\ldots$$

§ 2. ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

I. Рассмотрим некоторое множество M комплексных чисел (в дальнейшем под M будем подразумевать, как правило, совокупность всех точек плоскости или же часть плоскости, ограниченной одним или несколькими гладкими или кусочно-гладкими контурами.

Определение 5. Если каждому комплексному числу z, принадлежащему множеству M, соответствует вполне определенное единственное значение комплексной переменной w, то w называют однозначной функцией комплексного аргумента z, определенной на множестве M. Записывают это так $w=f(z)$.

Кроме однозначных функций, существуют многозначные, т. е. такие функции, где одному значению z соответствует несколько значений w. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, мы будем рассматривать однозначные функции.

Аргумент z определяется парой вещественных чисел x и y $z=x+iy$, w — также определяется парой вещественных чисел

$$u \text{ и } v \quad w=u+iv,$$

поэтому функциональная зависимость $w=f(z)$ может быть представлена следующим образом

$$w=u+iv=f(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Это значит, что функции $w=f(z)$ могут быть поставлены в соответствие две вещественные функции u и v двух вещественных аргументов x и y.

Рассмотрим примеры.

Пример 2.1. Функция $w=z^2$ определена и однозначна для всех точек z комплексной плоскости. Найдем функции u и v. Для этого подставим вместо z $x+iy$ и выделим вещественную и мнимую часть

$$z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi.$$

Откуда следует:

$$u(x,y)=x^2-y^2.$$

$$v(x,y)=2xy.$$

Пример 2.2. $w=\operatorname{Arg} z$. Эта функция определена для всех z, кроме $z=0$. Здесь каждому значению z соответствует не одно значение функции, а бесконечно много. Например, $z=i$ соответствует

$$\operatorname{Arg} z=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В дальнейшем будем обозначать через $\arg z$ тот из аргументов числа z, который лежит в пределах $(0,2\pi)$. Тогда

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Так как аргумент комплексного числа вещественный, то

$$\operatorname{Re} w = u(x,y) = \operatorname{Arg} z,$$

$$\operatorname{Im} w = v(x,y) = 0.$$

Напомним, что функцию вещественного аргумента можно геометрически представить некоторой кривой в плоскости. Интерпретировать подобным образом функцию комплексного аргумента мы не можем, так как z и w определяются четырьмя действительными числами x, y, u, v и нам потребовались бы четыре измерения. Поэтому здесь вводят в рассмотрение две комплексные плоскости: плоскость аргумента **z** и плоскость функции **w** (рис. 3).

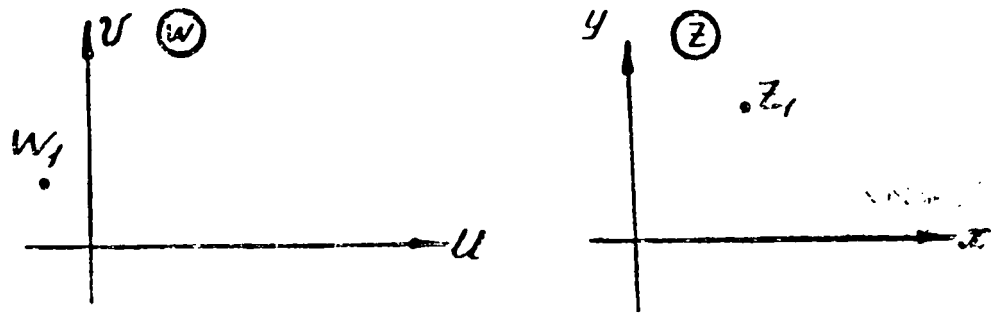

Рис. 3

Пусть z_1 принадлежит множеству M. Отметим точку z_1 в плоскости **z**. Найдем значение функции, соответствующее z_1

$$w_1 = f(z_1),$$

w_1 отметим в плоскости w.

Поступив таким образом со всеми точками из множества M, мы получим в плоскости **w** отображение этого множества. Итак, геометрической интерпретацией функций комплексного переменного является отображение одной комплексной области на другую.

Пример 2.3: $w = z + 2$. Функция определена на всей плоскости. Возьмем любую точку z_0 в плоскости **z** (рис. 4).

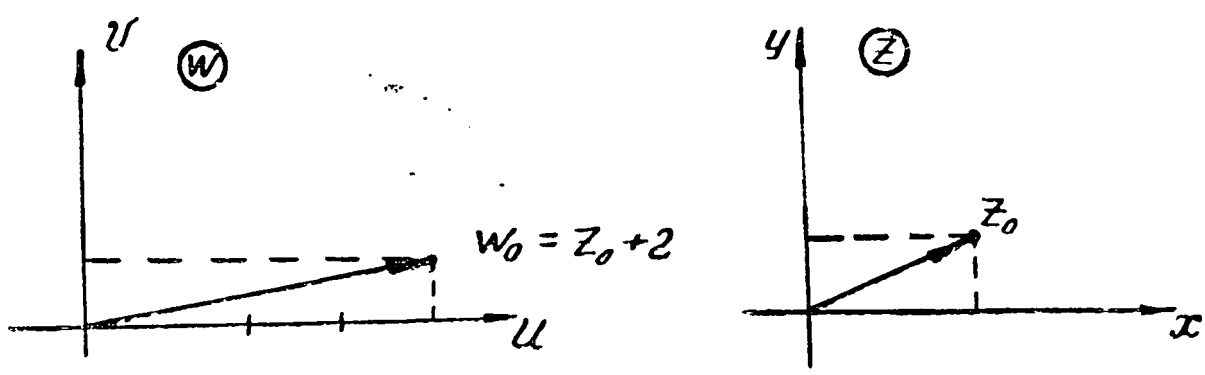

Рис. 4

Ее образом в плоскости **w** будет точка w_0, полученная сдвигом точки z_0 на две единицы вправо параллельно действительной оси. Отображение с помощью функции $w = z + 2$ означает, таким обра-

зом, параллельный перенос всей плоскости на две единицы параллельно действительной оси.

II. Предел функции, непрерывность. Предположим, что функция $w=f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0.

Определение 6. Комплексное число A называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0, если абсолютная величина разности $|f(z)-A|$ стремится к нулю, когда z стремится к z_0 т.е.

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)-A|=0;$$

записывают это так

$$A=\lim_{z\to z_0} f(z).$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию введенного определения предела (рис. 5).

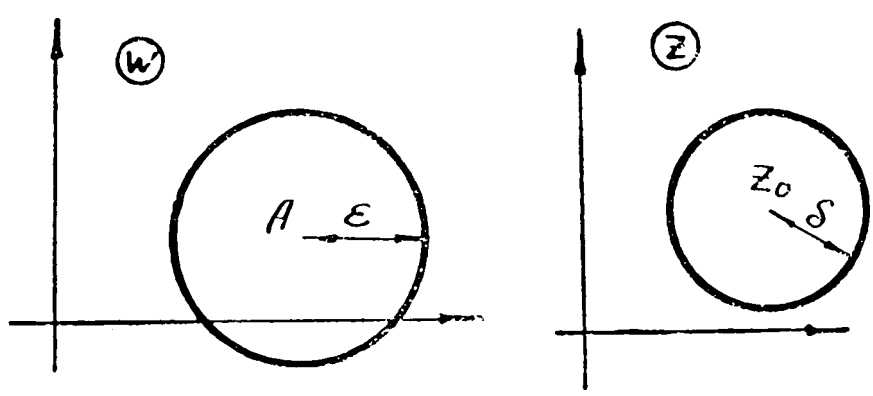

Рис. 5

Если функция $w=f(z)$ имеет предел A при $z\to z_0$, то согласно определению каждая внутренняя точка левого круга радиуса $\delta=\delta(\varepsilon)$ перейдет внутрь правого круга произвольно заданного радиуса ε.

Подобно тому как это было показано для предела комплексной последовательности, можно доказать следующие две леммы.

Лемма 4. *Существование предела у функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, когда z стремится к $z_0=x_0+iy_0$, эквивалентно существованию пределов у функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке (x_0, y_0), причем*

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)+i\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y).$$

Лемма 5. *Существование предела у функции $f(z)$ в точке z_0 эквивалентно существованию предела у $\arg f(z)$ и $|f(z)|$ в той же точке z_0.*

Определение 7. Если функция $w=f(z)$ определена в точке z_0 и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, то функция называется непрерывной в точке z_0.

Приведенные определения дословно повторяют соответствующие определения функций вещественного переменного. Это озна-

чает, что для комплексного переменного сохраняются все основные теоремы о пределах и непрерывности, доказанные в курсе вещественного анализа.

Вопросы и задачи

1. Сформулировать определение функции комплексного аргумента.

2. Найти вещественную и мнимую часть функций

$$\text{а) } w=z^3, \quad \text{б) } w=|z|, \quad \text{в) } w=\overline{z}.$$

3. Найти отображение плоскости z [illegible], осуществляемое функциями

$$\text{а) } w=3z, \quad \text{б) } w=ze^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \text{в) } w=z+2i.$$

4. Дать определение предела функции комплексного аргумента.

5. Какие функции комплексного аргумента называют непрерывными?

6. Функции

$$\frac{\operatorname{Re} z}{z}, \quad \frac{z}{|z|}, \quad \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z^2|}, \quad \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$$

определены для $z\neq 0$. Какие из них могут быть доопределены в точке $z=0$ так, чтобы они стали непрерывными в этой точке?

§ 3. ПРОИЗВОДНАЯ. УРАВНЕНИЯ КОШИ—РИМАНА. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ. ПОНЯТИЕ О КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

I. Производная. Предположим, что функция $w=f(z)$ задана в некоторой области, содержащей точку z_0. Рассмотрим приращение функции при изменении аргумента от z_0 до $z_0+\Delta z$ и отнесем это приращение функции к приращению аргумента z

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

Определение 8. Если существует предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, то этот предел называют производной функции в точке z_0 и обозначают $f'(z_0)$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0),$$

а функцию $f(z)$ называют *дифференцируемой* в точке z_0. Несмотря на то, что определение производной повторяет уже известное из

курса анализа, дифференцируемые функции комплексного переменного обладают по сравнению с дифференцируемыми функциями действительного переменного многими дополнительными свойствами. Причина появления их заключается в том, что требование существования производной функции комплексного аргумента является более сильным, чем требование существования производной функции действительного аргумента, а именно: требование существования производной функции действительного переменного означает существование предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближении точки $x+\Delta x$ к точке x по двум направлениям, слева ($\Delta x<0$) и справа ($\Delta x>0$) и совпадения этих пределов.

Требование же существования производной функции $f(z)$ комплексного переменного означает существование предела отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при приближении точки $z+\Delta z$ к точке z по любому пути, по любому из бесконечного множества различных направлений, и совпадение всех этих пределов.

Пример 3.1. Найдем производную функции $w=az+b$ (a и b—комплексные числа)

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{[a(z_0+\Delta z)+b]-[az_0+b]}{\Delta z}=a; \quad \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=a.$$

Функция $w=az+b$ дифференцируема при всех z и $w'=a$.

Пример 3.2. Пусть $w=\bar{z}$. Это значит, что, если

$$z=x+iy,$$

то

$$w=x-iy.$$

Дадим величине z приращение Δz. Тогда

$$\Delta w=\overline{z_0+\Delta z}-\overline{\Delta z_0}=\overline{\Delta z}.$$

Имеем

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1-i\frac{\Delta y}{\Delta x}}{1+i\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

но

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\varphi$$

(см. рис. 6). Поэтому

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{1-i\operatorname{tg}\varphi}{1+i\operatorname{tg}\varphi}.$$

Это отношение, таким образом, не зависит от $|\Delta z|$ и с изменением φ изменяется. Предел зависит от способа стремления Δz к нулю, следовательно, функция не имеет производной.

Этот пример показывает, что даже простейшие функции могут оказываться недифференцируемыми в комплексной плоскости. Заметим, что вещественная и мнимая часть рассмотренной функции ($u=x$, $v=-y$) имеют частные производные по x и y. Следовательно, для дифференцируемости $f(z)$ недостаточно дифференцируемости по x и y ее вещественной и мнимой частей. Нужны дополнительные условия. Выясним, какими они должны быть.

II. Условия Коши—Римана. Предположим, что $f(z)=w$, дифференцируемая в точке z. Это значит, что существует $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ и не зависит от закона стремления $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ к нулю. Пусть сначала $\Delta z=\Delta x$. Тогда (рис. 7)

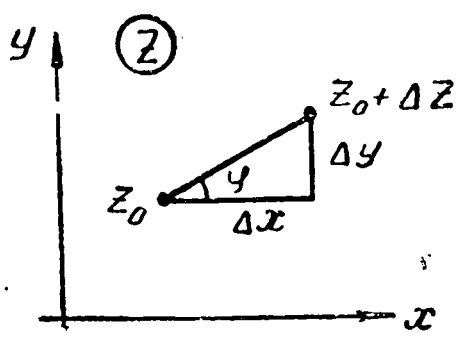

Рис. 6

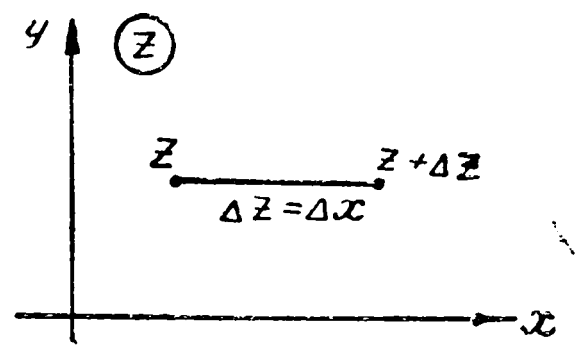

Рис. 7

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Теперь выберем $\Delta z=i\Delta y$ (рис. 8) и найдем значение производной

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta y}-i\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

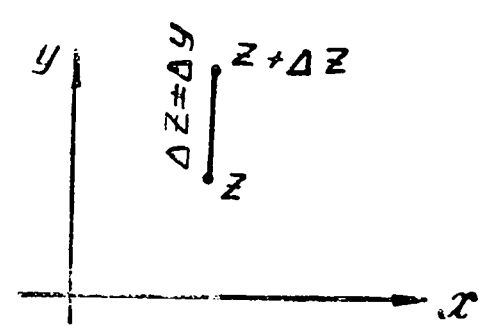

Рис. 8

Так как пределы должны совпадать, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Сравнивая вещественные и мнимые части, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x, y)$ имеет производную, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют частные производные, связанные условиями*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Полученные условия называются условиями Коши—Римана или Эйлера—Даламбера.

Пример 3.3. Проверим выполнение условий Коши—Римана для функции $w=z^2$.

Ранее мы нашли

$$u(x, y)=x^2-y^2 \quad v=(x, y)=2xy.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x, \; -\frac{\partial v}{\partial x}=-2y.$$

Условия Коши-Римана, таким образом, выполнены.

Пример 3.4. Рассмотрим функцию $w=\bar{z}$; $u=x$; $v=-y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1, \; -\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Итак, $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ ни при каком z условия Коши—Римана не выполнены. Значит, функция $w=z$ нигде не дифференцируема. При некоторых дополнительных ограничениях условия Коши—Римана будут не только необходимыми, но и достаточными для дифференцируемости функции $w=f(z)=u+iv$.

Теорема 2. Если в некоторой точке комплексной плоскости первые частные производные от функций u и v ($u=Ref(z)$ $v=Imf(z)$) непрерывны и удовлетворяют условиям Коши—Римана, то в этой точке существует производная $f'(z)$.

Определение 9. Функция называется аналитической, в некоторой области D, если она однозначна и имеет непрерывную производную в этой области.*

Определение 10. Функция $f(z)$ называется аналитической в точке, если $f(z)$ аналитична в некоторой области D, содержащей эту точку.

Аналитичность в точке означает таким образом, что производная существует в самой точке и в некоторой ее окрестности в то время, как дифференцируемость в точке означает лишь наличие производной в этой точке.

---

* Аналитическую функцию называют также голоморфной, регулярной, моногенной.

Пример 3.4. Выяснить имеются ли точки, в которых функция $w=z\mathrm{Re}z$ является аналитической. Если

$$w = z\mathrm{Re}z,$$

то

$$u+iv=(x+iy)x=x^2+ixy$$

$$u = x^2, \quad v = xy;$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=y.$$

Условия Коши—Римана выполнены только при $x=0$ и $y=0$. Следовательно, функция $zRez$ дифференцируема только в одной точке $z=0$ и нигде не является аналитической.

Так как основные теоремы о пределах сохраняются для функций, зависящих от комплексного аргумента, а определение производной функции комплексного аргумента также не отличается (по своей структуре) от определения производной для функции действительно аргумента, то нетрудно проверить, что известные правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного, степени, функции от функции, обратной функции остаются справедливыми и в случае комплексного аргумента. Это означает, что сумма и произведение двух аналитических функций есть функция аналитическая. Частное двух аналитических функций представляет собой аналитическую функцию везде, где знаменатель отличен от нуля. Сложная функция также будет аналитической в некоторой области, если все ее звенья аналитичны в соответствующих областях.

Пример 3.6. Легко непосредственно убедиться, что функция $w=z$ аналитична во всей плоскости. На основании теорем об аналитичности произведения и суммы можно утверждать, что многочлен

$$P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$$

является аналитической функцией во всей плоскости.

III. Геометрический смысл производной. Пусть функция $w=f(z)$—аналитическая в некоторой области D, ее производная $f'(z)$ комплекснозначная функция и ее можно представить следующим образом

$$f'(z) = |f'(z)|e^{i\arg f(z)}.$$

Рассмотрим отдельно геометрический смысл модуля производной и ее аргумента в какой-нибудь точке z_0, где $f'(z_0)\neq 0$. Пусть функция $w=f(z)$ отображает область D_z, плоскости z на область D_w плоскости w. Пусть при этом отображении кривая γ переходит в кривую Γ (рис. 9).

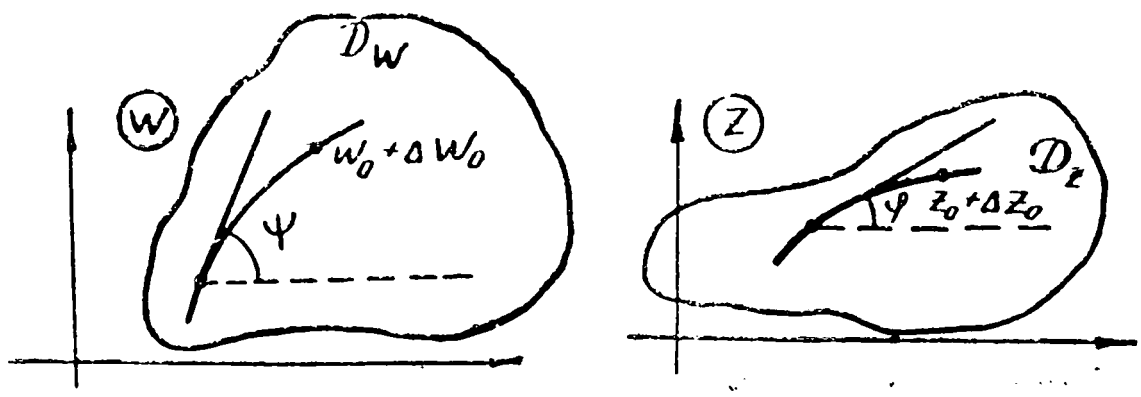

Рис. 9

На γ выберем две точки z_0 и $z_0+\Delta z$; при отображении они перейдут в w_0 и $w_0+\Delta w$. $|\Delta z|$ приближенно равно длине бесконечно малого участка кривой γ, а $|\Delta w|$ — длина образа этого участка. Отношение этих величин указывает на растяжение или сжатие (т. е. изменение масштаба) при отображении, осуществляемом функцией $w=f(z)$ и, следовательно, отношение $\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ представляет собой коэффициент изменения масштаба в окрестности точки z_0.

Предел этого отношения

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|=|f'(z_0)|$$

представляет коэффициент изменения масштаба в точке z_0 при отображении $w=f(z)$. Как мы видим этот коэффициент в точке z_0 зависит лишь от z_0 и поэтому растяжение в точке одинаково по всем направлениям.

Перейдем к рассмотрению аргумента производной. Мы имеем

$$\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}=\arg\Delta w-\arg\Delta z. \tag{3.1}$$

Пусть кривые γ и Γ имеют касательные соответственно в точках z_0 и w_0, тогда $\arg\Delta z$ означает угол наклона секущей и, следовательно, в пределе при $\Delta z\to 0$ переходит в угол наклона касательной, на кривой γ в точке z_0 (обозначим этот угол через φ). $\arg w$ в пределе дает угол ψ наклона касательной к Γ в точке w_0. Равенство (3.1) в пределе перепишется так

$$\varphi-\psi=\arg f'(z_0),$$

т. е.

$$\psi=\varphi-\arg f'(z_0)$$

(см. рис. 9).

Последнее соотношение означает, что, если у $f(z)$ существует отличная от нуля производная в точке z_0, то при отображении, осуществляемом функцией $w=f(z)$, все кривые, проходящие через точку z_0, поворачиваются на один и тот же угол, определяемый $\arg f'(z_0)$. Следовательно, углы между кривыми, проходящими через точку z_0, сохраняются.

Определение 11. Отображение одной плоской области на другую плоскую область, при котором сохраняются углы между кривыми называется конформным. Таким образом, как мы показали выше, отображение какой-либо области D, осуществляемое функцией $f(z)$, является конформным, если $f'(z)$ нигде в D не обращается в нуль.

Рассмотрим в качестве примера отображение, осуществляемое аналитической функцией $w=z^2$. На этом частном примере проанализируем, что происходит в точках, где производная обращается в нуль. В нашем примере $f'(z)=2z$. Производная отлична от нуля везде, кроме начала координат и, следовательно, осуществляет конформное отображение каждой области, не содержащей точки $z=0$, на некоторую область в плоскости w.

В плоскости z выберем верхнюю полуплоскость:

$$0<|z|<\infty; \quad 0<\arg z<\pi \text{ (рис. 10).}$$

Для w будем иметь $|w|=|z^2|=|z|^2$ и, поэтому $0<|w|<\infty$; далее $\arg w=2\arg z$, откуда $0<\arg w<2\pi$.

Это означает, что верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ при отображении $w=z^2$ переходит плоскость w с выброшенной вещественной положительной полуосью (рис. 11).

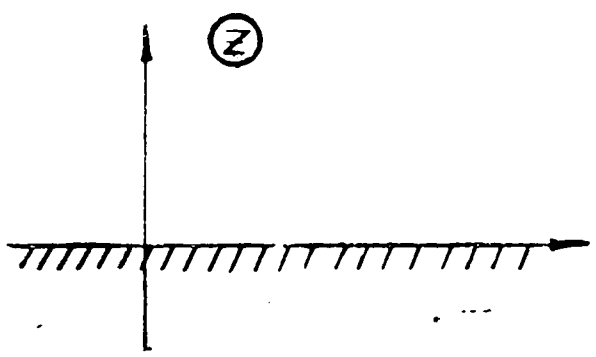

Рис. 10

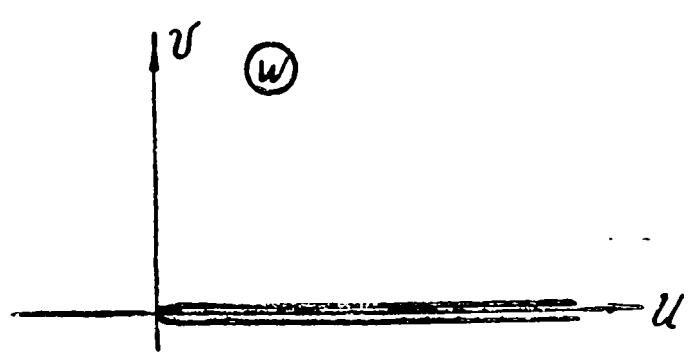

Рис. 11

Возьмем в плоскости z луч, с уравнением $\arg z=\alpha$ (α-постоянная). Его образом в плоскости w будет луч с уравнением $\arg w=2\alpha$. Это означает, что углы между кривыми, проходящими через начало координат, увеличиваются вдвое в начале координат, т. е. там, где $f'(z)=0$, нарушена конформность.

Вопросы и задачи

1. Сформулировать определение производной функции комплексной переменной.

2. Найти производную функции а) $w=z^3$, б) $w=\frac{1}{z}$.

3. Показать, что функция $w=|z|$ не дифференцируемая в нуле.

4. Проверить выполнение условий Коши-Римана для функций а) $w=|z|$, б) $w=|z|^2$, в) $w=z^3$.

5. Сформулировать определение аналитической функции в области и в точке.

6. Отображение осуществляется с помощью функции $w=z^2$. Найти угол поворота направления, выходящего из точки z_0, и коэффициент растяжения в точках:

$$\text{а) } z_0=1, \quad \text{б) } z_0=-\frac{1}{4}, \quad \text{в) } z_0=1+i, \quad \text{г) } z_0=-3+4i.$$

7. Найти характер отображения, осуществляемого функцией а) $w=3z+4$, б) $w=\frac{1}{z}$.

8. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение задается функцией $w=\frac{1}{z}$?

§ 4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. СВЯЗЬ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ

Предположим, что $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются вещественной и мнимой частями аналитической функции и притом имеют непрерывные частные производные второго порядка *.

Продифференцировав тождество $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ по x, а тождество

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

по y и сложив результаты, найдем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x},$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Полученное уравнение называется уравнением Лапласа, а решения этого уравнения называются *гармоническими функциями*. Итак, мы получили, что вещественная часть аналитической функции есть функция гармоническая. Аналогичный результат получается для $v(x, y)$. Для этого нужно первое из условий Коши—Римана дифференцировать по y, а второе — по x, затем сложить. Гар-

* В дальнейшем будет показано, что вещественная и мнимая части аналитической функции всегда имеют частные производные всех порядков.

монические функции тесно связаны с аналитическими. Так что справедлив результат в некотором смысле обратный к рассмотренному выше.

Теорема 3. *Всякая гармоническая функция является вещественной (или мнимой) частью некоторой аналитической функции.*

Доказательство будет сведено к тому, что мы построим аналитическую функцию по заданной ее вещественной (или мнимой) части. Для этого достаточно подобрать так мнимую часть $v(x, y)$, чтобы вместе с заданной $u(x, y)$ она удовлетворяла условиям Коши—Римана.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Составим полный дифференциал функции $v(x, y)$

$$dv(x, y)=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

Так как $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ должны быть связаны с частными производными $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ условиями Коши—Римана, мы заменим в выражении dv производные $v(x, y)$ производными $u(x, y)$

$$dv(x, y)=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Итак, полный дифференциал v выражен через исходные данные. Интегрируя, получим функцию $v(x, y)$

$$v(x, y)=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Приведенный интеграл не зависит от пути в силу гармоничности $u(x, y)$. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

Замечание. Аналитическая функция восстанавливается по своей вещественной части с точностью до постоянного мнимого слагаемого, которое возникнет при интегрировании.

Определение 12. Гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие условиям Коши—Римана и, следовательно, являющиеся действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

называются сопряженной парой гармонических функций.

Вопросы и задачи

1. Сформулировать определение гармонической функции.
2. Будет ли функция u^2 гармонической, если u гармоническая?
3. Как связаны между собой аналитические и гармонические функции?
4. Существует ли аналитическая функция $f(z)=u+iv$, для которой

$$\text{а) } u=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \text{б) } v=\ln((x^2+y^2)-x^2+y^2, \quad \text{в) } u=e^{\frac{y}{x}}.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)=u+iv$ по заданной действительной или мнимой части

$$1)\ u=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$2)\ v=3+x^2-y^2-\frac{y}{2(x^2+y^2)}.$$

§ 5. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. КРУГ И РАДИУС СХОДИМОСТИ. АНАЛИТИЧНОСТЬ СУММЫ СТЕПЕННОГО РЯДА

I. Функциональные ряды. Рассмотрим последовательность функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$, .., заданных в некоторой области D комплексной плоскости.

Функциональный ряд

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots, \tag{5.1}$$

членами которого являются функции комплексного аргумента z, может в одних точках сходиться, в других расходиться. Совокупность точек сходимости называется *областью сходимости* данного ряда. Область сходимости либо совпадает с областью D, либо составляет ее часть. Сумма ряда

$$f(z)=\lim_{n\to\infty} S_n(z),$$

где

$$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)$$

представляет собой функцию аргумента z, определенную в области сходимости ряда. Как и в случае вещественных рядов играют важную роль правильно и равномерно сходящиеся ряды.

Определение 13. Если в области D каждый член функционального ряда можно оценить по модулю некоторым числом

$$|f_n(z)|\leqslant m_n$$

и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n$ *сходится, то функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *называется правильно сходящимся в области D.*

Из определения правильно сходящегося ряда следуют выводы:

1. Если ряд сходится правильно, то он сходится абсолютно и просто сходится. Действительно, положительные члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(z)|$ не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда $\sum_{k=}^{\infty} m_k$.

2. Из правильной сходимости функционального ряда следует равномерная оценка остатка $R_n(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$ этого ряда, не зависящая от z, т. е.

$$|R_n(z)|<\varepsilon(n),$$

где $\varepsilon(n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Действительно,

$$|R_n(z)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k(z)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty} m_k=\varepsilon(n)$$

Следовательно, по аналогии с вещественной областью для комплексных функциональных рядов имеют место теоремы о непрерывности суммы ряда,

II. Степенные ряды. Круг и радиус сходимости.

Определение 14. Ряд вида

$$C_0+C_1z+C_2z^2+\ldots+C_nz^n+\ldots \qquad (5\ 2)$$

или

$$C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\ldots+C_n(z-z_0)^n+\ldots \qquad (5.3)$$

называется степенным рядом. Коэффициенты ряда $c_0, c_1, c_2,\ldots c_n,\ldots$ заданные комплексные числа z_0 называется центром разложения, z — комплексная переменная величина. Так как ряд (5.3) получается из ряда (5.2) заменой z на $(z-z_0)$, то мы ограничимся рассмотрением степенных рядов (5.2) с центром разложения в нуле.

Выясним характер области сходимости степенного ряда. Ради простоты ограничимся рассмотрением тех степенных рядов, у которых существует конечный или бесконечный

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=R.$$

Однако, как можно показать, полученные при этом выводы о характере области сходимости справедливы для любых степенных рядов. Возьмем ряд

$$|c_0|+|c_1||z|+|c_2||z|^2+\ldots+|c_n||z|^n+\ldots, \qquad (5.4)$$

составленный из модулей членов ряда (5.2) и применим признак сходимости Даламбера. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}||z|^{n+1}}{|c_n|\ |z|^n}=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\frac{|z|}{R}. \qquad (5.5)$$

Отсюда видно, что при $|z|<R$ ряд модулей сходится и, следовательно, исходный степенной ряд сходится абсолютно. Если $|z|>R$, то как известно из теории вещественных рядов при этом общий член ряда (5.4) и, значит, ряда (5.2) не стремятся к нулю при $n\to\infty$. Следовательно, для точек $|z|>R$ степенной ряд расходится. Таким образом, степенной ряд обладает простой в структурном отношении областью сходимости: это круг конечного или бесконечного радиуса R. *R называется радиусом сходимости.* Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ существует, то R определяется пределом отношения

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \qquad (5.6)$$

Если указанный предел не существует, то пользоваться формулой (5.6) нельзя. Поведение ряда на границе области сходимости, т. е. на окружности $|z|=R$ различно, необходимо дополнительное исследование.

Пример 5.1. Определить область сходимости ряда

$$1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$$

находим

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=1.$$

Значит, ряд сходится и притом абсолютно внутри единичного круга с центром в начале координат.

Пример 5.2. Определить область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Находим

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\infty.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ сходится во всей плоскости.

Пример 5.3. Выяснить область сходимости ряда

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad (5.7)$$

Так как коэффициенты с нечетными индексами равны нулю, предел $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ не существует при $n\to\infty$. Для определения области сходимости введем новую переменную $z^2=t$. Ряд (5.7) перепишется тогда так:

$$1-\frac{t}{2!}+\frac{t^2}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{t^n}{(2n)!}+\ldots \tag{5.8}$$

Для определения области сходимости по t можно рассмотреть

$$R_t=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{[2(n+1)]!}{(2n)!}=\infty.$$

Следовательно, ряд (5.8) сходится во всей плоскости t, а ряд (5.7) сходится во всей плоскости z.

Точно также, как на вещественной оси, можно установить, что во всякой замкнутой области, принадлежащей области сходимости, степенной ряд сходится правильно и, следовательно, его сумма — непрерывная функция. Далее, как и для вещественных рядов (однако в сущности более сильный), имеет место следующий результат.

Теорема 4. *Внутри круга сходимости сумма степенного ряда $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ (5.9) аналитическая функция, т. е. имеет производную $S'(z)$, которая может быть получена почленным дифференцированием членов данного ряда*

$$S'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nc_nz^{n-1}. \tag{5.10}$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что ряд (5.10) имеет тот же круг сходимости, что и ряд (5.9). Предположим существование

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=R$$

и рассмотрим предел отношения соответствующих коэффициентов ряда (5.10). Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{nc_n}{(n+1)c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=R.$$

Далее покажем, что производная суммы $S(z)$ существует и может быть получена путем почленного дифференцирования ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$. Рассмотрим

$$\frac{\Delta S}{\Delta z}=\frac{S(z+\Delta z)-S(z)}{\Delta z}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}. \tag{5.11}$$

z выбрано в круге сходимости: $|z|<R$.

Δz выберем так, чтобы не выйти из круга сходимости, т. е.

$$|z+\Delta z|<R.$$

Посмотрим, какими свойствами обладает каждый член ряда (5.11) как функция Δz. Обозначим

$$\Theta_n(\Delta z)=\left|\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}\right|=\left|\frac{nz^{n-1}\Delta z+c_n^2 z^{n-2}\Delta z^2+\ldots+\Delta z^n}{\Delta z}\right|=$$

$$=\left|nz^{n-1}+c_n^2 z^{n-2}\Delta z+\ldots+\Delta z^{n-1}\right|,$$

$\Theta_n(\Delta z)$ непрерывная функция по Δz, так как представляет собой многочлен относительно Δz. Далее

$$\Theta_n(\Delta z)=\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)-z}{\Delta z}\left[(z+\Delta z)^{n-1}+\right.$$

$$\left.+(z+\Delta z)^{n-2}z+\ldots+z^{n-1}\right],$$

поэтому

$$|\Theta_n(\Delta z)|=\left|\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}\right|\leqslant|z+\Delta z|^{n-1}+|z+\Delta z|^{n-2}|z|+\ldots+|z|^{n-1}. \qquad (5.12)$$

Выберем R_1 так, чтобы $R_1<R$; $|z+\Delta z|<R_1$, $|z|<R_1$, т. е. внутри круга сходимости мы строим круг меньшего радиуса, но так, чтобы точки $z+\Delta z$ и z не вышли бы из этого нового круга; тогда из оценки (5.12) следует

$$\left|\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}\right|\leqslant nR_1^{n-1}.$$

Ряд (5.11) представляет собой правильно сходящийся ряд непрерывных относительно Δz функций. Его правильная сходимость вытекает из сходимости ряда числовых оценок

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_nR_1^{n-1}.$$

Поэтому сумма ряда представляет собой непрерывную относительно Δz функцию. следовательно, можно переходить к пределу в выражении (5.11)

$$\frac{\Delta S}{\Delta z}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$$

при $\Delta z\longrightarrow 0$.

Откуда заключаем, что

$$S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n nz^{n-1}.$$

Теорема доказана

Следствие. Внутри круга сходимости сумма степенного ряда имеет производные всех порядков. Любая из них может быть получена, если соответствующий степенной ряд почленно продифференцировать соответствующее число раз.

На основании последней теоремы с помощью степенных рядов можно строить аналитические функции. Приведем еще один важный результат в теории степенных рядов.

Теорема единственности. *Всякий сходящийся степенной ряд есть ряд Тейлора своей суммы.*

Доказательство. Пусть сходится ряд.

$$c_0+c_1(z-\alpha)+c_2(z-\alpha)^2+\ldots+c_n(z-\alpha)^n+\ldots=S(z). \qquad (5.13)$$

Положим $z=\alpha$, получим $c_0=S(\alpha)$.

Далее продифференцируем (5.13) один раз и положим $z=\alpha$ находим, что $c_1=S'(\alpha)$.

После n-кратного дифференцирования и подстановки $z=\alpha$ получим

$$n!c_n=S^{(n)}(\alpha)$$

или же

$$c_n=\frac{S^{(n)}(\alpha)}{n!}. \qquad (5.14)$$

Подставив полученные выражения для коэффициентов c_n в ряд (5.13)

$$S(z)=S(\alpha)+S'(\alpha)(z-\alpha)+\frac{S''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2+\ldots+$$

$$+\frac{S^n(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n+\ldots,$$

получим ряд Тейлора для функции $S(z)$.

Вопросы и задачи

1. Повторить тему «Функциональные и степенные ряды в вещественной области.*

2. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{2^n z^n}\right).$$

3. Сформулировать определение правильно сходящегося функционального ряда.

4. Дать определение степенного ряда.

5. Какого вида могут быть области сходимости степенного ряда?

6. Может ли оказаться полукруг областью сходимости степенного ряда (рис. 12)?

7. Дать определение радиуса сходимости и написать формулу для его вычисления.

---

* Бермант А. Ф. «Курс математического анализа». Т. 1, §§ 141—146, 1951.

8. Найти радиус сходимости следующих рядов

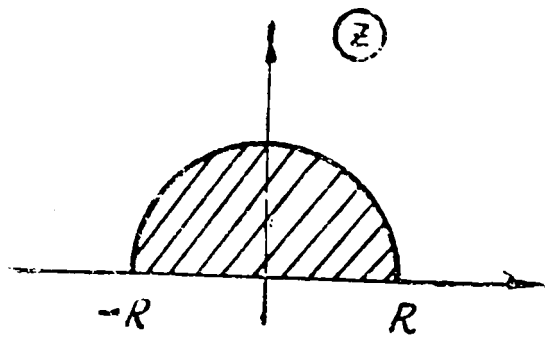

Рис. 12

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$,

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$, д) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

9. Радиусы сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ равны соответственно R_1 и R_2. Что можно сказать о радиусах сходимости рядов:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n$?.

Предполагается, что существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = R_1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = R_2.$$

10. Сформулировать теорему об аналитичности суммы степенного ряда.

§ 6. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ e^z, sinz, cosz, shz, chz

I. Введем определение основных трансцендентных функций для комплексных значений независимой переменной. Очевидно, что когда показатель степени является комплексным числом, определение степени a , вводимое в алгебре, теряет смысл. Точно так же известные из тригонометрии определения тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ теряют смысл при комплексных значениях z. Принимая во внимание известные для действительных значений x разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ в степенной ряд, положим, по определению:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{6.1}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \tag{6.2}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{6.3}$$

Ряды, стоящие в правых частях этих равенств, сходятся, и притом абсолютно, при любом комплексном значении z. Действительно, рассмотрим, например, ряд (6.1).

Ряд, составленный из модулей членов данного ряда $1+z+\ldots+$ $+r^n+\ldots$, где $r=|z|$, представляет собой известный показательный ряд для вещественного аргумента, который сходится при любом r. Значит, ряд (6.1) сходится абсолютно. Аналогично можно показать сходимость рядов (6.2) и (6.3). Следовательно, равенства (6.1), (6.2), (6.3) определяют во всей плоскости комплексного переменного z функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, совпадающие при действительных z с соответствующими вещественными функциями e^x, $\sin x$, $\cos x$. Рассмотрим свойства введенных функций.

1. **Формулы Эйлера**. Подставим в выражении (6.1) iz вместо z; получим

$$e^{iz}=1+iz-\frac{z^2}{2!}-\frac{iz^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots$$

Умножая равенство (6.2) на i и складывая с (6.3), находим, что

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z. \tag{6.4}$$

Соотношение (6.7) называется *формулой Эйлера*. Заменой в (6.4) $+z$ на $-z$ можно получить вторую формулу Эйлера

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z. \tag{6.5}$$

Из (6.4) и (6,5) следует

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{6.6}$$

2. **Теорема умножения для** e^z. Рассмотрим произведение e^z на e^ζ. Это означает, что рассматривается произведение рядов

$$e^z e^\zeta=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\right)\left(1+\zeta+\frac{\zeta^2}{2!}+\ldots+\frac{\zeta^n}{n!}+\ldots\right).$$

Перемножим ряды, при этом заметим, что для абсолютно сходящихся комплексных рядов справедливы все действия, которые были рассмотрены для абсолютно сходящихся рядов в вещественной области, получаем

$$e^z e^\zeta=1+(z+\zeta)+\frac{(z+\zeta)^2}{2!}+\ldots+\frac{(z+\zeta)^n}{n!}+\ldots=e^{z+\zeta}.$$

Итак,

$$e^z e^\zeta=e^{z+\zeta}. \tag{6.7}$$

Представим e^z следующим образом, воспользовавшись теоремой умножения, затем формулой Эйлера (6.4)

$$e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{6.8}$$

Из этого следует, что

$$\mathrm{Re}\,e^z = e^x\cos y, \quad \mathrm{Im}\,e^z = e^x\sin y.$$

3. **Периодичность** e^z, $\sin z$ и $\cos z$. Функция e^z обладает чисто мнимым периодом $2\pi i$.

Действительно,

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z.$$

(Мы воспользовались соотношениями (6.7) и (6.4)).

Так как $\cos z$ и $\sin z$ выражаются через показательную функцию (6.6), имеем

$$\cos(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Аналогично для $\sin z$

$$\sin(z+2\pi) = \sin z.$$

4. Найдем производную функции e^z.

Так как была доказана возможность дифференцирования степенных рядов в комплексной плоскости (теорема 4), найдем производную, дифференцируя почленно ряд

$$e^{z\prime} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\ldots\right)' =$$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n!}\ldots = e^z.$$

Аналогично получаем производные для $\cos z$ и $\sin z$.

$$(\sin z)' = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \ldots\right)' = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \cos z$$

$$(\cos z)' = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right)' =$$

$$= -\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = -\sin z.$$

5. Рассмотрим $\sin(-z)$ и $\cos(-z)$. По определению

$$\sin(-z) = -z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots = -\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = -\sin z$$

$$\cos(-z) = 1 - \frac{(-z)^2}{2!} + \frac{(-z)^4}{4!} - \ldots = \cos z.$$

Проверим выполнение некоторых соотношений, известных из тригонометрии, например, теорему сложения

$$\cos(z+\zeta) = \cos z\cos\zeta - \sin z\sin\zeta.$$

Имеем

$$\cos(z+\zeta)+i\sin(z+\zeta)=e^{i(z+\zeta)}=e^{iz}e^{i\zeta}=$$

$$=(\cos z+i\sin z)(\cos\zeta+i\sin\zeta)=\cos z\cos\zeta-\sin\zeta\sin z+$$

$$+i(\sin z\cos\zeta+\sin\zeta\cos z). \qquad (6.9)$$

В полученный результат вместо z и ζ подставим соответственно $-z$ и $-\zeta$:

$$\cos(z+\zeta)-i\sin(z+\zeta)=\cos z\cos\zeta-\sin z\sin\zeta-$$

$$-i(\sin z\cos\zeta+\sin\zeta\cos z). \qquad (6.10)$$

Сложим (6.9) и (6.10). Получим

$$\cos(z+\zeta)=\cos z\cos\zeta-\sin z\sin\zeta.$$

Вычитая из (6.9) соотношение (6.10), получим теорему сложения для $\sin z$.

Мы видим, что многие свойства тригонометрических функций для комплексного аргумента дословно повторяют известные из тригонометрии свойства $\sin x$ и $\cos x$. Однако у $\sin z$ и $\cos z$ появляются новые свойства, существенно отличные от вещественных $\sin x$ и $\cos x$.

Нам известно, что тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ ограничены по модулю единицей. Это свойство не сохраняется при переходе на всю комплексную плоскость. Покажем этот факт. Для этого оценим модуль, например $\cos z$

$$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy.$$

По формулам Эйлера можно записать

$$\cos iy=\frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2}=\operatorname{ch}y;$$

$$\sin iy=\frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i}=i\operatorname{sh}y.$$

Тогда

$$\cos z=\cos x\operatorname{ch}y-i\sin x\operatorname{sh}y;$$

$$|\cos z|=\sqrt{\cos^2x\operatorname{ch}^2y+\sin^2x\operatorname{sh}^2y}. \qquad (6.11)$$

Известно, что гиперболические функции $\operatorname{sh}y$ и $\operatorname{ch}y$ неограниченно растут с ростом аргумента, поэтому из (6.11) следует, что модуль $|\cos z|$ может быть как угодно велик. Аналогичный результат имеет место для $\sin z$. Однако справедлива теорема, что $\sin^2z+\cos^2z=1$, которую можно доказать, используя представление через показательную функцию или ряды.

Пример 6.1. Найти $\cos i$. Принимая во внимание, что

$$\cos i = 1 - \frac{i^2}{2!} + \frac{i^4}{4!} - \ldots = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \ldots,$$

получим $\operatorname{ch} 1$.

Пример 6.2. Найти $\sin(1+2i)$.

Так как

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

имеем

$$\sin(1+2i) = \frac{e^{i+2} - e^{2-i}}{2i} = \frac{e^{-2}e^{i} - e^{2}e^{-i}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{-2}(\cos 1 + i\sin 1) - e^{2}(\cos 1 - i\sin 1)}{2} =$$

$$\frac{\cos 1(e^{-2} - e^{2})}{2i} + \frac{i\sin 1(e^{2} - e^{-2})}{2i} = \operatorname{ch} 2 \sin 1 + \operatorname{sh} 2 \cos 1.$$

II. Определение гиперболических функций в комплексной плоскости. Под гиперболическим синусом $\operatorname{sh} z$ и гиперболическим косинусом $\operatorname{ch} z$ понимают соответственно

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots;$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

Ряды сходятся на всей комплексной плоскости.

Рассмотрим свойства гиперболических функций.

1. Найдем производные

$$(\operatorname{sh} z)' = \left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right)' = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z;$$

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

2. Выясним, какая существует связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями. Для этого возьмем $\sin iz$.

$$\sin iz = iz - \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^5}{5!} - \ldots = i\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right) = i \operatorname{sh} z.$$

Для $\cos iz$ имеем

$$\cos iz = \operatorname{ch} z.$$

Вопросы и задачи

1. Дать определение показательной функции e^z.

2. Найти значения

$$\text{а) } e^{-i\frac{\pi}{2}}; \quad \text{б) } e^{1-i\frac{\pi}{2}}; \quad \text{в) } e^{3+i}; \quad \text{г) } e^{2+i\frac{\pi}{6}};$$

$$\text{д) } e^{2\pi in}; \quad \text{е) } e^{i(2n+1)\pi} \quad (n\text{—целое}).$$

3. Какие свойства показательной функции вещественной переменной e^x переносятся на функцию e^z?

4. Как определяются функции $\sin z$, $\cos z$?

5. Найти:

$$\text{а) } \sin i; \text{ б) } \cos(1+i); \quad \text{в) } \sin(x+iy); \text{ г) } \cos(x+iy).$$

6. Перечислить свойства функций $\sin z$, $\cos z$.

7. Доказать тождества

$$\text{а) } \sin(z+\pi)=-\sin z; \text{ б) } \cos(z+\pi)=-\cos z;$$

$$\text{в) } \sin x=-i\,\mathrm{sh}\,ix; \text{ г) } \cos x=\mathrm{ch}\,ix.$$

8. Проверить непосредственнно выполнение условий Коши-Римана для функций e^z, $\cos z$, $\sin z$.

9. Установить связь между гиперболическим и тригонометрическим косинусом.

10. Выразить через значения действительного аргумента $\mathrm{sh}\,i$, $\mathrm{ch}\,i$.

§ 7. МНОГОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ: ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ И СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

I. Логарифмическая функция. *Определение 15. w называется логарифмом числа $z\neq 0$, если*

$$e^w = z. \tag{7.1}$$

Логарифм обозначается так:

$$w = \mathrm{Ln}\,z. \tag{7.2}$$

В определении логарифма была использована показательная функция e^w, изученная в предыдущем параграфе. В отличие от вещественного случая логарифмы в комплексной области обладают следующим интересным свойством.

Теорема 5. *Всякое комплексное число, отличное от нуля, имеет бесконечное множество логарифмов.*

Доказательство. Запишем число w в алгебраической форме

$$w = u + iv,$$

а z в показательной форме:

$$z = |z|\, e^{i\,\mathrm{Arg}\,z}$$

и подставим в (7.1). Имеем

$$e^{u+iv}=e^u e^{iv}=|z|\, e^{i\,\mathrm{Arg}\,z},$$

откуда следует

$$e^u = |z|, \tag{7.3}$$

$$v = \mathrm{Arg}\,z. \tag{7.4}$$

Так как $|z|$—вещественное положительное число, то логарифмируя (7.3) обычным способом, получим

$$u = \ln|z|. \tag{7.5}$$

Так как аргумент комплексного числа определяется неоднозначно (см. пример 2.2), то выражение (7.4) можно переписать в следующем виде

$$v = \arg z + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, .., \tag{7.6}$$

где $0 \leqslant \arg z < 2\pi$.

Подставим (7.5) и (7.6) в выражение (7.2)

$$\mathrm{Ln}\, z = w = u + iv = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i$$

или

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i = w_k \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{7.7}$$

Итак, мы получили, что комплексное число $z \neq 0$ имеет бесконечное множество логарифмов w_k, которые отличаются друг от друга на число, кратное $2\pi i$.

Пример 7.1. Найти логарифм числа i. Имеем

$$\mathrm{Ln}\, i = i\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi i.$$

Выясним, как изменяются логарифмы w_k, если будет непрерывно изменяться число z. Для этого введем в рассмотрение две комплексные плоскости z и w. Если точка z опишет в своей плоскости некоторую непрерывную замкнутую кривую γ (рис. 13), которая не проходит через начало координат и не содержит его внутри себя, то вдоль этой кривой $|z|$ и $\arg z$ будут изменяться непрерывно и вернутся к исходным значениям. Следовательно, w_k тоже будут изменяться непрерывно. Поэтому после обхода точкой z контура γ w_k вернутся к своим первоначальным значениям, что изображено на рис. 14.

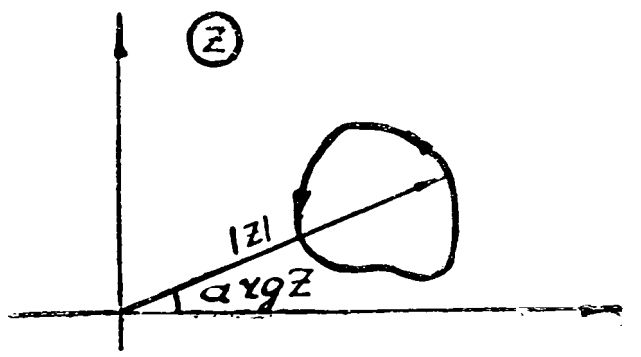

Рис. 13

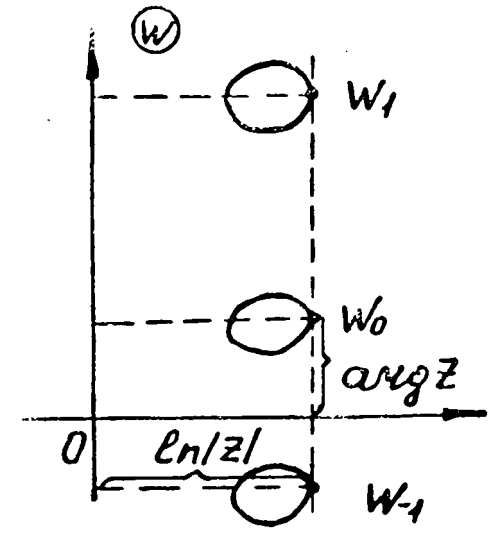

Рис. 14

Если же точка z опишет замкнутую кривую, содержащую нулевую точку внутри (рис. 15), то аргумент z увеличится на 2π и каждое w_k непрерывно перейдет в следующее w_{k+1} (рис. 16).*

Учитывая такой непрерывный переход одного значения логарифма в другое при обходе начала координат, все значения логарифма мы будем рассматривать как различные ветви одной бесконечнозначной функции, имеющей в начале координат особую точку, так называемую точку ветвления. Чтобы можно было каждое w_k рассматривать как однозначную функцию выделяют отдельные

* Обход кривой γ происходит против часовой стрелки.

ветви. Для этого поступают обычно так: в плоскости z делают разрез по отрицательной полуоси *. В этой разрезанной плоскости любой контур не сможет

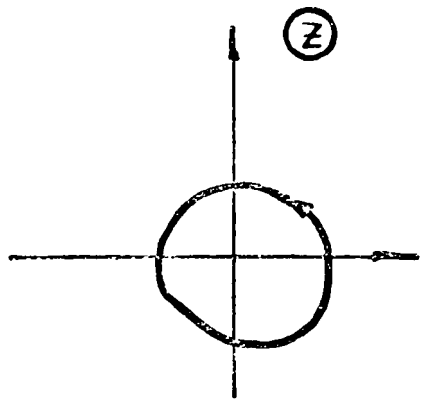

Рис. 15

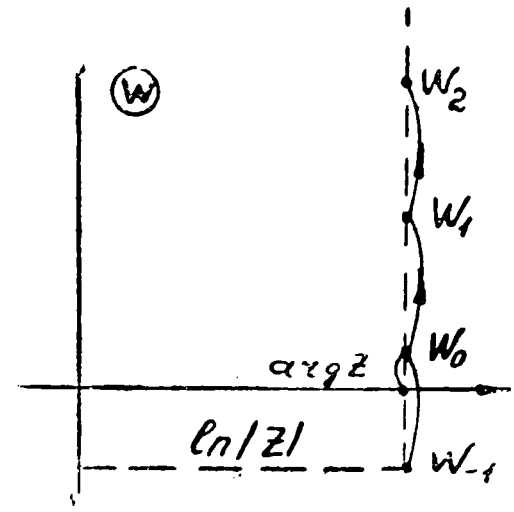

Рис. 16

охватить начало координат (рис. 17). Это значит, что обход по любому контуру в этой плоскости не будет давать приращения аргументу, и каждый логарифм возвратится к первоначальному значению. Выбрав в какой-либо точке разрезанной плоскости значение аргумента и продолжив непрерывно соответствующее значение $w_k = \ln z$, мы получили то, что принято называть одной из ветвей логарифмической функции. *Главной ветвью* логарифма принято называть ту ветвь, у которой аргументы вещественных чисел равны нулю.

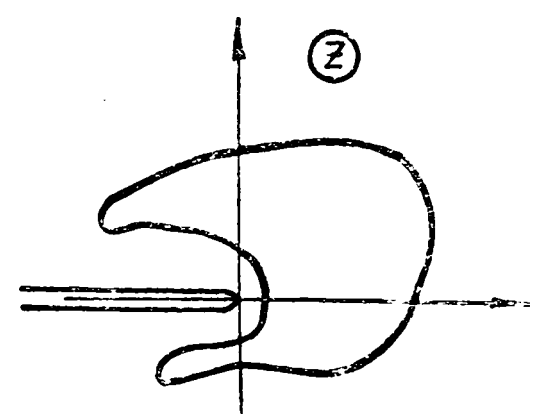

Рис. 17

Главную ветвь будем обозначать $\ln z$. Каждая ветвь логарифма однозначна в разрезанной плоскости. Покажем, что она аналитична.

Так как одна ветвь отличается от другой на постоянную величину $2\pi ni$, то достаточно показать существование производной у главной ветви. Воспользуемся формулой (7.7) и вычислим производную

$$\frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{d}{dx}\ln z = \frac{d}{dx}\ln|z| + i\frac{d}{dx}\arg z =$$

$$= \frac{d}{dx}\ln\sqrt{x^2+y^2} + i\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} +$$

$$+ i\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}.\ ^{*}$$

---

* Можно делать разрез по любому лучу, выходящему из начала координат.

** Производную логарифмической функции можно было бы получить формально, применяя формулу дифференцирования обратной функции.

II. Общая степенная функция. Логарифмическая функция дает возможность ввести в комплексной плоскости степенную функцию

$$w=z^{\alpha}$$

с произвольным показателем (общую степенную функцию).

Под степенной функцией с произвольным показателем

$$w=z^{\alpha}$$

понимают функцию

$$w=z^{\alpha}=e^{\alpha \operatorname{Ln} z}=e^{\alpha \ln|z|+i\alpha \operatorname{Arg} z}. \tag{7.8}$$

В силу многозначности логарифма выражение z^{α}, определенное равенством (7.8) многозначно. Его главным значением будем называть то, которое получится, если подставим $\ln z$ вместо $\operatorname{Ln} z$. При обходе по контуру, содержащему внутри себя начало координат, степенная функция получит новое значение, отличающееся от первоначального значения множителем $e^{2\pi\alpha i}$. Если α — целое положительное или отрицательное, то $e^{2\pi\alpha i}=1$ и функция z^{α} будет однозначной. Если α—рациональное число, т. е. $\alpha=\frac{k}{n}$*, (k,n—целые), то после обхода вокруг начала координат n раз добавочный множитель обратится в единицу

$$e^{2\pi \frac{k}{n} i n}=1.$$

В этом случае степенная функция $z^{\frac{k}{n}}$ имеет конечное число ветвей, равное n. При $\alpha=\frac{1}{n}$ можно показать, что $z^{\frac{1}{n}}$ совпадает с корнем n-ой степени из комплексного числа, т. е.

$$z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}.$$

В общем случае, когда α любое, функция z^{α} имеет бесконечно много ветвей, каждая из которых дифференцируема в разрезанной плоскости.

Пример 7.2. Найти i^i. По определению

$$i^i=e^{i\ln i}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\right)}=e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} \quad k=0,\pm1,\pm2,$$

главное значение величины i^i равно $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Вопросы и задачи

1. Дать определение логарифма комплексного числа.
2. Сколько логарифмов имеет комплексное число?
3. Найти

   а) $\ln 1$, б) $\ln(1+i\sqrt{3})$, в) $\ln(1+i)$, г) $\ln(-i)$, д) $\ln(-3+4i)$.

4. Проследить за движением логарифмов w_k, если точка z перемещается в своей плоскости вдоль окружности $|z|=2$ по часовой стрелке.
5. Что такое точка ветвления?
6. Что такое ветвь логарифмической функции? Какими она обладает свойствами?

* Дробь $\frac{k}{n}$ предполагается несократимой.

8. Какая функция называется степенной?

9. Сколько ветвей имеет степенная функция z^{α}?

10. Вычислить

$$\text{а) } 3^i, \quad \text{б) } (-1)^i.$$

11. Повторить тему «Извлечение корней из комплексных чисел» *.

§ 8. ИНТЕГРАЛ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

1. Определение интеграла от функции комплексной переменной и его основные свойства во многом сходны с определением и основными свойствами криволинейных интегралов по координатам.

Зададим на комплексной плоскости гладкую или кусочно-гладкую кривую в параметрической форме

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases} \quad (a\leqslant t\leqslant b).$$

Умножив второе из уравнений на i и сложив с первым, получим:

$$z=x+iy=x(t)+iy(t)=z(t).$$

Таким образом, эта же кривая может быть задана одним комплексным уравнением

$$z=z(t) \quad (a\leqslant t\leqslant b).$$

Так, например, лежащая в верхней полуплоскости полуокружность $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$ может быть задана комплексным уравнением $z=Re^{it}$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$.

На линии $z=z(t)$ введем ориентацию; предположим, например, что начальной является точка A, соответствующая значению $t=a$, а конечной—точка B, соответствующая значению $t=b$. Пусть (c) означает ориентированную указанным образом линию. Допустим далее, что на линии (c) задана непрерывная функция $w=f(z)$.

Разобьем кривую (c) на n частей точками $A=z_0, z_1, z_2, \ldots z_n=B$ и внутри каждой части выберем по точке $\zeta_k=\xi_k+i\eta_k (k=1,2,\ldots n)$ (рис. 18).

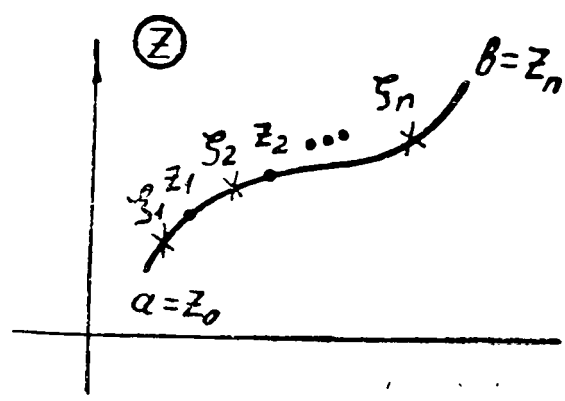

Рис. 18

Составим сумму

$$\sum_{k=1} f(\zeta_k)\Delta z_k, \quad (\Delta z_k = z_k - z_{k-1}),$$

которую мы будем называть *интегральной*.

Определение 16. Предел, к которому стремится интегральная сумма при условии $\max\limits_k |\Delta z_k| \to 0$, *называется интегралом от функции* $f(z)$ *по кривой* (c) *и обозначается символом* $\int\limits_{(c)} f(z)dz$. *

Можно показать, что при наложенных на функцию $f(z)$ и и линию (c) ограничениях интегральная сумма, в самом деле, имеет предел.

Свяжем введенный интеграл с вещественными криволинейными интегралами. Полагая

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

и

$$\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k,$$

мы находим, что

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] +$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n} [v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k].$$

Переходя к пределу, получим

$$\int\limits_{(c)} f(z)dz = \int\limits_{(c)} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_{(c)} v(x,y)dx + u(x,y)dy. \qquad (8.1)$$

Слева стоит интеграл от функции комплексного переменного, справа — два криволинейных вещественных интеграла.

Основные свойства криволинейного интеграла в вещественной области переносятся на интеграл в комплексной области.

1 свойство: зависимость от ориентации кривой. Если направление на кривой изменить на противоположное, то интеграл меняет знак, т. е.

$$\int\limits_{(AB)} f(z)dz = -\int\limits_{(BA)} f(z)dz.$$

---

* Если кривая (c) замкнута, то интеграл по замкнутой кривой обозначается следующим образом: $\oint\limits_{(c)} f(z)dz$.

2 свойство: линейность. Имеем

$$\int\limits_{(c)}[\alpha f_1(z)+\beta f_2(z)]dz=\alpha\int\limits_{(c)}f_1(z)dz+\beta\int\limits_{(c)}f_2(z)dz$$

α и β—постоянные комплексные числа.

3 свойство: аддитивность. Обозначим через c_1+c_2 кривую, состоящую из кривых c_1 и c_2. Тогда

$$\int\limits_{(c_1+c_2)}f(z)dz=\int\limits_{(c_1)}f(z)dz+\int\limits_{(c_2)}f(z)dz.$$

Теорема об оценке модуля интеграла. Имеет место следующее неравенство

$$\left|\int\limits_{(c)}f(z)dz\right|\leqslant\int\limits_{(c)}|f(z)|dl, \tag{8.2}$$

где dl дифференциал длины дуги кривой c.

Доказательство. Оценим по модулю интегральную сумму

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|\,|\Delta z_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|\Delta l_k.\ *$$

Переходя к пределу, получим результат:

$$\left|\int\limits_{(c)}f(z)dz\right|<\int\limits_{(c)}|f(z)|dl.$$

Следствие. Если $f(z)$ ограничена, т. е. $|f(z)|<M$, а длина кривой c равна l, то

$$\left|\int\limits_{(c)}f(z)dz\right|<Ml. \tag{8.3}$$

II. Формулы для вычисления интеграла. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int\limits_{(c)}f(z)dz.$$

Воспользуемся тем, что этот интеграл можно свести к вещественным интегралам (8.1), для которых известны вычислительные формулы. Будем предполагать, что кривая c, заданная уравнением $z=z(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, гладкая, т. е. существует непрерывная производная $z'(t)\neq 0$.* Тогда

$$\int\limits_{(c)}f(z)dz=\int\limits_{a}^{b}f(z(t))z'(t)dt. \tag{8.4}$$

Действительно, по формуле (8.1) мы имеем

$$\int\limits_{(c)}f(z)dz=\int\limits_{(c)}udx-vdy+i\int\limits_{(c)}udy+vdx.$$

---

* Δl_k—длина дуги $z_{k-1}z_k$.

Переходя к параметру в правой части этого равенства, находим, что

$$\int\limits_{(c)} f(z)dz=\int\limits_a^b \{u[x(t),y(t)]x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t)\}dt+$$

$$+i\int\limits_a^b \{u(x(t),y(t))y'(t)+v(x(t),\quad y(t))x'(t)\}dt=$$

$$=\int\limits_a^b [(u+iv)x'+(-v+iu)y']dt=\int\limits_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Пример 8.1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_c \mathrm{Re}\, zdz,$$

где дугой c является:

1) прямолинейный отрезок, соединяющий точку O с точкой $1+i$;

2) ломаная, состоящая из прямолинейного отрезка, соединяющего точку O с точкой 1, и прямолинейного отрезка, соединяющего точку 1 с точкой $1+i$.

Решение. 1) Уравнение отрезка, соединяющего точки O и $1+i$ в параметрической форме, имеет вид $x=t;\ y=t$, а в комплексной $z=(1+i)t$, где действительное переменное t изменяется от O до 1.

Находим

$$dz=(1+i)dt$$

и

$$\int\limits_c \mathrm{Re}zdz=\int\limits_0^1 \mathrm{Re}[(1+i)t](1+i)dt=(1+i)\int\limits_0^1 tdt=\frac{(1+i)t^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{1+i}{2}.$$

2) Уравнение отрезка, соединяющего точки O и 1, в комплексной форме $z=t$, где t изменяется от O до 1; уравнение в комплексной форме отрезка, соединяющего точки 1 и $1+i$, $z=1+it$, где t изменяется от O до1.

Итак,

$$\int\limits_c Rezdz=\int\limits_0^1 \mathrm{Re}tdt+\int\limits_0^1 \mathrm{Re}(1+it)idt=$$

$$=\int\limits_0^1 tdt+i\int\limits_0^1 dt=\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1+it\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+i.$$

Пример 8.2. Вычислить $\oint\limits_{(c)}(z-a)^n dz$, где (c) есть кривая $|z-a|=R$, a — постоянное комплексное число, n — целое.

Выберем положительное направление на кривой против часовой стрелки.

Уравнение окружности с центром в точке a радиуса R имеет вид z

$$z-a=\mathrm{R}e^{it} \quad 0\leqslant t<2\pi.$$

Откуда $z=a+\mathrm{R}e^{it}$.

Воспользуемся формулой (8 2)

$$\oint\limits_{(c)}(z-a)^n dz=\int\limits_0^{2\pi}(\mathrm{R}e^{it})^n \mathrm{R}ie^{it}dt=R^{n+1}i\int\limits_0^{2\pi}e^{it(n+1)}dt=$$

$$=\begin{cases} R^{n+1}i\,\dfrac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)}\Bigg|_0^{2\pi}=0, \text{ если } n\neq -1 \\ 2\pi i, \text{ если } n=-1. \end{cases}$$

III. Основная теорема Коши. *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области A, то*

$$\oint\limits_{(c)} f(z)dz=0, \tag{8.5}$$

где c — произвольный контур в области D.

Доказательство. Запишем интеграл $\int\limits_{(c)} f(z)dz$ по формуле (8.1)

$$\oint\limits_{(c)} f(z)dz=\oint\limits_{(c)} udx-vdy+i\oint udy+vdx.$$

Каждое слагаемое в правой части представляет собой криволинейный интеграл по замкнутому контуру от вещественных функций. Известно, что эти интегралы равны нулю при следующих условиях: непрерывные первые производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ должны быть связаны соотношениями вида

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \text{ для первого слагаемого}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \text{ для второго слагаемого.}$$

Эти соотношения представляют собой условия Коши—Римана для аналитической функции $f(z)$ и поэтому

$$\oint\limits_{(c)} f(z)dz=0.$$

Теорема доказана.

Распространим эту теорему на случай многосвязной области.

Рассмотрим многосвязную область D, ограниченную внешним

контуром c_0 и внутренними контурами $c_1, c_2, \ldots c_n$ (рис. 19). Предположим, что функция $f(z)$ аналитична в области D.

Обозначим

$$\oint_{c_k} f(z)dz$$

интеграл по контуру c_k, проходимому против часовой стрелки.

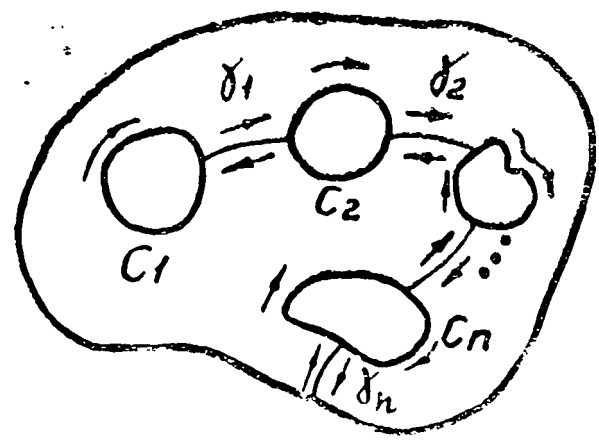

Рис. 19

Сложный контур, являющийся границей данной многосвязной области и состоящий из контуров $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n$ обозначим Γ. Будем считать положительным то направление, при движении по которому область D остается слева. Тогда интеграл по контуру Γ будет равен сумме интегралов по контуру c_0, проходимому против часовой стрелки, и интегралов по контурам $c_1, c_2, \ldots c_n$, проходимым по часовой стрелке:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{c_0} f(z)dz - \oint_{c_1} f(z)dz - \ldots - \int_{c_n} f(z)dz.$$

Основная теорема Коши будет распространена на случай многосвязной области, если будет показано, что

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Соединим контуры, образующие сложный контур Γ кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$, как показано на рис. 18. В результате получилась односвязная область, в которой $f(z)$ аналитична. Следовательно, можно применить теорему для односвязной области. Интегралы по кривым $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ уничтожатся ввиду того, что интегрирование по каждой из этих кривых будет производиться два раза в противоположных направлениях. Останутся лишь интегралы по контурам $c_0, c_1, \ldots c_n$, т. е.

$$\int_{(c_0)} f(z)dz - \int_{(c_1)} f(z)dz - \ldots - \int_{(c_n)} f(z)dz = 0 \qquad (8.6)$$

или

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

и теорема для многосвязной области доказана.

Равенство (8.6) можно записать в виде

$$\oint\limits_{c_0} f(z)dz=\oint\limits_{c_1} f(z)dz+\oint\limits_{c_2} f(z)dz+\ldots+\oint\limits_{c_n} f(z)dz. \qquad (8.7)$$

В частности, если функция $f(z)$ является аналитической в двусвязной области (рис. 20), то из (8.7) следует

$$\oint\limits_{(c_0)} f(z)dz=\oint\limits_{(c_1)} f(z)dz. \qquad (8.8)$$

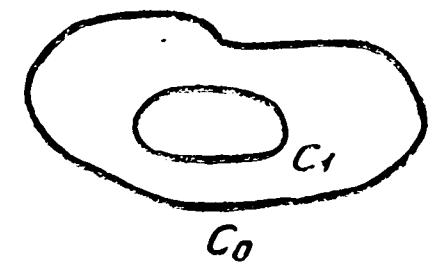

Рис. 20

IV. Интегрирование функциональных рядов. Рассмотрим функциональный ряд

$$S(z)=f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots,$$

определенный в некоторой области комплексной плоскости.

Теорема 6. *Если функциональный ряд* $S(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится правильно на некоторой кривой* c *и члены* $f_n(z)$ *непрерывны, то ряд можно интегрировать почленно, т. е.*

$$\int\limits_{(c)} S(z)dz=\int\limits_{(c)} f_1(z)dz+\int\limits_{(c)} f_2(z)dz+\ldots+\int\limits_{(c)} f_n(z)dz+\ldots$$

Доказательство проводится так же, как в аналогичной теореме в вещественной области.

V. Интегральная формула Коши.

Теорема 7. *Пусть функция* $f(z)$ *аналитическая в области* D, *ограниченной контуром* c, *и пусть точка* z *лежит внутри контура* c. *Тогда функция* $f(z)$ *представима в следующей форме*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \qquad (8.9)$$

Замечание. Если точка z лежит внутри контура c, то интегральная формула Коши дает возможность найти значение аналитической функции в любой точке области по значениям функции на границе этой области. Если же точка z лежит вне контура c, то функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ по переменной ζ аналитическая внутри контура c и по основной теореме Коши интеграл равен нулю.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}.$$

Эта функция представляет собой отношение двух аналитических функций, значит, она голоморфна везде, кроме точки $\zeta=z$. Окружим точку z ε-окрестностью (рис. 21).

По следствию из теоремы Коши (8.8) можно записать:

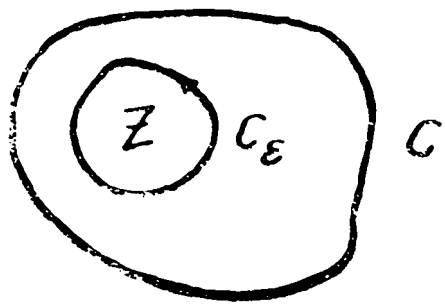

Рис. 21

$$\oint\limits_{(C)} \varphi(\zeta)d\zeta = \oint\limits_{(C_\varepsilon)} \varphi(\zeta)d\zeta$$

или

$$\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint\limits_{(C_\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \qquad (8.10)$$

Преобразуем правую часть последнего равенства следующим образом

$$\oint\limits_{(C_\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint\limits_{(C_\varepsilon)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta + \oint\limits_{(C_\varepsilon)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Имеем (см. пример 8.2)

$$\oint\limits_{(C_\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \oint\limits_{(C_\varepsilon)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = f(z) 2\pi i.$$

Из (8.10) мы получаем:

$$\oint\limits_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) 2\pi i + \oint\limits_{(C_\varepsilon)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta. \qquad (8.11)$$

Оценим интеграл

$$\oint\limits_{(C_\varepsilon)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Так как дробь

$$\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

при ζ близко к z приближенно равна $f'(z)$, а производная существует, то

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| < M.$$

Тогда, на основании оценки модуля интеграла

$$\left| \oint\limits_{(C_\varepsilon)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| < M 2\pi\varepsilon.$$

Устремляя в равенстве (8.10) ε к нулю, получим

$$\oint\limits_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z).$$

Откуда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Теорема доказана.

Пример. 8.3.

Найти

$$\oint\limits_{|\zeta-2i|=4} \frac{e^{\frac{\pi}{2}\zeta}}{\zeta-i}\, d\zeta.$$

Данный интеграл дает значение числителя подинтегральной функции в точке i умноженное на $2\pi i$.

$$\oint\limits_{|\zeta-2i|=4} \frac{e^{\frac{\pi}{2}\zeta}}{\zeta-i}\, d\zeta = 2\pi i e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\pi i\, i = -2\pi.$$

Вопросы и задачи

1. Какие линии заданы уравнениями

а) $\underset{0<t<\infty}{z=t(1+i)}$, б) $\underset{\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{2}}{z=a\cos t+ib\sin t}$, в) $\underset{-\infty<t<0}{z=t+\frac{i}{t}}$,

г) $\underset{0\leqslant t\leqslant 2}{z=1-it}$, д) $\underset{-\infty<t<\infty}{z=t^2+it^4}$?

2. Сформулировать определение интеграла от функции комплексного переменного по кривой.

3. Какими свойствами обладает этот интеграл?

4. Как можно оценивать модуль интеграла?

5. Вычислить $\int\limits_{(c)} \ln z dz$. Если путь интегрирования:

а) является прямолинейным отрезком, соединяющим точку O с точкой $2+i$;

б) состоит из прямолинейного отрезка, соединяющего точку O с точкой i, и прямолинейного отрезка, соединяющего точку i с точкой $2+i$.

6. Вычислить $\int\limits_{(c)} |z| dz$.

c есть полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат, лежащей в верхней полуплоскости, причем точка -1 является начальной, а точкой 1 — конечной.

7. Сформулировать и доказать основную теорему Коши для односвязной области; для многосвязной области.

8. В чем заключается основной смысл интегральной формулы Коши?

9. Вычислить

$$\oint\limits_{(c)} \frac{z^2 dz}{z-2i},$$

где c: имеет уравнение $|z|=3$.

10. Вычислить

$$\oint\limits_{(c)} \frac{\sin z dz}{z+i},$$

где c: $|z+i|=3$.

11. Вычислить

$$\oint\limits_{(c)} \frac{e^z dz}{z(z-2i)},$$

где c: $|z-3i|=2$.

§ 9. Разложение в степенные ряды аналитических функций. Нули и полюсы. Ряд Лорана.

1. Ранее было показано (см. § 5 теорема 4), что ряд

$$c_0+c_1(z-\alpha)+c_2(z-\alpha)^2+\ldots+c_n(z-\alpha)^n+\ldots$$

представляет собой аналитическую функцию в круге сходимости. Пусть теперь $f(z)$ аналитическая функция в круге. Можно ли эту функцию представить в виде степенного ряда? Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 8. *Всякую функцию $f(z)$ аналитическую в круге с центром в точке α можно разложить в степенной ряд по степеням $(z-\alpha)$ единственным образом.*

Доказательство. Воспользуемся интегральной формулой Коши (8.9)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(c_R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}\,d\zeta, \tag{9.1}$$

где c_R окружность $|z-\alpha|=R$.

Выпишем так называемое ядро интегральной формулы и преобразуем его

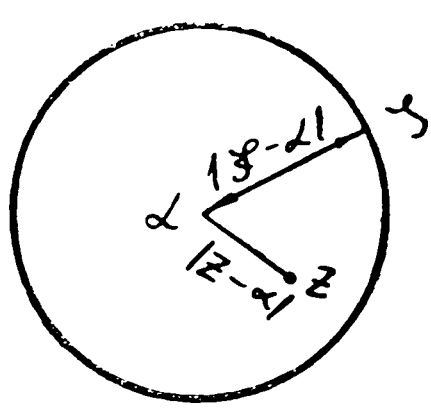

Рис. 22

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-\alpha-(z-\alpha)}=\frac{1}{\zeta-\alpha}\,\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}}.$$

Так как точка z лежит внутри круга, то $|z-\alpha|<R$ между тем, как $|\zeta-\alpha|=R$ (см. рис. 22). Поэтому

$$\left|\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right|<1.$$

Воспользовавшись формулой геометрической прогрессии, представим ядро в виде ряда

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-\alpha}\left[1+\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}+\left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^n+\ldots\right]. \tag{9.2}$$

Подставим это выражение в (9.1)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(c_R)} f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}$ сходится правильно на окружности c_R.

Так как после умножения на $f(\zeta)$ членов ряда правильная сходимость не нарушается, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}$ можно проинтегрировать почленно. Таким образом получаем:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta \tag{9.3}$$

или

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\alpha)^n, \tag{9.4}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{9.5}$$

Единственность полученного разложения следует из теоремы единственности § 5.

Замечание. Если функция $f(z)$ аналитическая в произвольной области D, то разложение ее в степенной ряд (9.4) будет иметь место в максимальном круге с центром в точке α, полностью принадлежащем D.

Следствие. Аналитическая функция имеет производные любого порядка.

Действительно, аналитическая функция в круге представима степенным рядом, который можно дифференцировать бесконечное число раз (см. теорему 4).

Сравнивая различные формулы для вычисления коэффициентов степенного ряда (9.5) и (5.14) можно получить интегральное представление производных от аналитической функции:

$$f^{(n)}(\alpha)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{9.6}$$

Пример 9.1. Функцию $w=\frac{1}{z-1}$ разложить в степенной ряд и определить радиус сходимости.

а) в круге с центром в нуле;

б) в круге с центром в точке -1.

Решение. Разложим функцию по степеням z

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-1-z-z^2-\ldots-z^n-\ldots$$

Ряд сходится в круге радиуса $R_1=1$, так как в точке $z=1$ функция $\frac{1}{z-1}$ не аналитична (рис. 23),

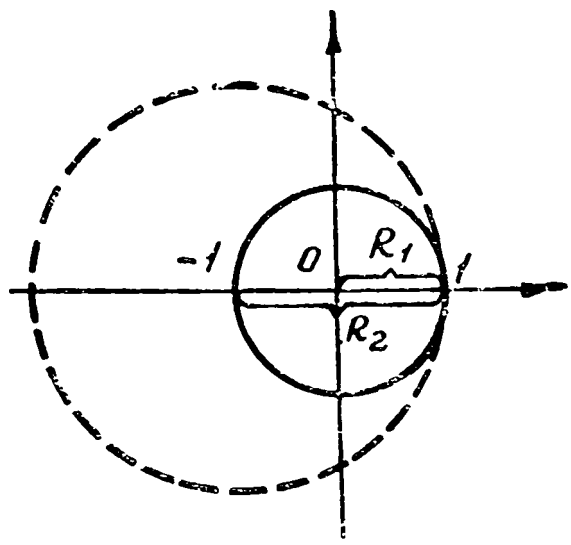

Рис. 23

б) Чтобы разложить функцию $\frac{1}{z-1}$ по степеням $z+1$, представим ее следующим образом

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z+1-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=-\frac{1}{2}\times$$

$$\times\left(1+\frac{z+1}{2}+\frac{(z+1)^2}{2^2}+\ldots+\frac{(z+1)^n}{2^n}+\ldots\right).$$

Радиус сходимости в этом случае $R_2=2$, ибо в точке $z=1$ функция не аналитична (рис. 23).

II. Нули аналитической функции.

Определение 17. Число z_0 называется нулем (корнем) аналитической функции $w=f(z)$, если $f(z_0)=0$.

Определение 18. Число z_0 называется нулем кратности n, если

$$f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(n-1)}(z_0)=0,$$

а

$$f^{(n)}(z_0)\neq 0.$$

Если $n=1$, то z_0 называется *простым нулем.*

В окрестности нуля аналитическая функция имеет интересное представление, к рассмотрению которого мы переходим. Пусть z_0—нуль функции $f(z)$. Рассмотрим круг с центром в точке z_0, где $f(z)$ аналитическая. В этом круге $f(z)$ можно представить в виде степенного ряда

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Если z_0 корень кратности n, то соотношение (9.4) принимает вид

$$f(z)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1}+\ldots$$

Вынесем множитель $(z-z_0)^n$ за скобки и получим

$$f(z)=(z-z_0)^n\left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)+\ldots\right].$$

Положим

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)+\ldots=\varphi(z).$$

Тогда $f(z)$ будет иметь вид

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z),$$

причем $\varphi(z)$ не обращается в нуль в точке z_0, ибо

$$\varphi(z_0)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\neq 0.$$

Таким образом доказана теорема.

Теорема 9. *В окрестности нуля z_0 кратности n аналитическая функция представляется в виде произведения*

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z), \tag{9.7}$$

где $\varphi(z)$ тоже аналитическая, и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Справедливо и обратное утверждение: если функция $f(z)$ представляет в окрестности z_0 в виде

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z), \text{ где } \varphi(z_0)\neq 0,$$

то z_0 есть функция $f(z)$ кратности n.

III. Полюсы аналитической функции.

Определение 19. Точка z_0 называется полюсом аналитической функции $f(z)$, если она является нулем функции $\frac{1}{f(z)}$.

Если z_0—нуль кратности n функции $\frac{1}{f(z)}$, то функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс n-порядка. В случае $n=1$ полюс называют простым.

Пусть z_0 является полюсом n-порядка. Выясним характер поведения функции $f(z)$ при приближении z к z_0.

Для этого воспользуемся теоремой 9 и представим $\frac{1}{f(z)}$ по формуле (9.7) в окрестности z_0. Имеем

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^n\varphi(z),$$

где

$$\varphi(z_0)\neq 0.$$

Тогда

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n\varphi(z)}.$$

Если z стремится к z_0, то выражение $\frac{1}{\varphi(z)}$ стремится к некоторому числу, отличному от нуля, а дробь $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ неограниченно растет по модулю. Следовательно, $|f(z)|$ также неограниченно растет и поэтому в точке z_0 нарушается аналитичность, т. е. z_0 оказывается точкой разрыва $f(z)$.

IV. Ряд Лорана и особые точки аналитической функции. Покажем, что в круге с центром в полюсе z_0 функция $f(z)$ представима в виде суммы некоторого ряда, который можно рассматривать как обобщение ряда Тейлора. Предположим, что в рассматриваемой окрестности точки z_0 функция $\frac{1}{f(z)}$ не имеет других нулей кроме z_0. Тогда в этой окрестности $\frac{1}{\varphi(z)}$ будет аналитической и ее можно разложить в степенной ряд:

$$\frac{1}{\varphi(z)}=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots$$

Для функции $f(z)$ будем иметь следующий ряд

$$f(z)=\frac{a_0}{(z-z_0)^n}=\frac{a_1}{(z-z_0)^{n+1}}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{z-z_0}+a_n+a_{n+1}(z-z_0)+\ldots,$$

который можно также записать в виде

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{c_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots \tag{9.8}$$

Этот ряд отличается от ряда Тейлора тем, что содержит отрицательные степени $(z-z_0)$. Такой ряд называется *рядом Лорана*. Сумма всех членов ряда, содержащих отрицательные степени $(z-z_0)$, т. е.

$$\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{c_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}$$

называется *главной* частью ряда Лорана, а ряд

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$$

называется *правильной* частью ряда Лорана.

Пример 9.1. Рассмотрим функцию $f(z)=\frac{\cos z}{z^2}$. В точке $z=0$ функция имеет полюс второго порядка. Разложив эту функцию по степеням z, получим

$$\frac{\cos z}{z^2}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}-\frac{z^4}{6!}+\ldots$$

Главная часть данного ряда Лорана состоит из одного члена $\frac{1}{z^2}$, а правильная часть есть ряд:

$$-\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots$$

Вообще говоря, главная часть ряда Лорана может иметь бесконечное число слагаемых.

Рассмотрим, например, функцию $w=e^{\frac{1}{z}}$. Пользуясь известным показательным рядом, разложим эту функцию по степеням z

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\ldots+\frac{1}{n!\,z^n}+\ldots$$

Мы видим, что главная часть полученного ряда Лорана содержит бесконечное число членов. В то же время у функции $e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z=0$ нарушается аналитичность.

Итак, ряд Лорана отличается от ряда Тейлора тем, что содержит главную часть, которая возникает за счет того, что в центре разложения у функции, представимой рядом, нарушается условие аналитичности. Точки, в которых нарушается условие аналитичности функции называются *особыми точками* аналитической функции. Особая точка называется *изолированной,* если в ее окрестности нет других особых точек.

Полюс является изолированной особой точкой. В окрестности полюса главная часть ряда Лорана содержит конечное число членов. Наибольшая по абсолютной величине отрицательная степень члена в главной части определяет порядок полюса. Так у функции $\frac{\cos z}{z^2}$ в точке $z=0$ — полюс второго порядка и главная часть ряда Лорана такова: $\frac{1}{z^2}$.

Если главная часть содержит лишь одно слагаемое, то полюс — простой. Например, функция $\frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\ldots$ имеет в нуле простой полюс. Отметим следующий важный факт.

Теорема 10. *Конечное число членов в главной части ряда Лорана в круге с центром в z_0 определяет в точке z_0 полюс и только полюс.*

Доказательство. В одну сторону теорема доказана. См. (9.8). Покажем в обратную сторону.

Предположим, что ряд Лорана с центром разложения в z_0 имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{c_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots$$

Вынесем в правой части за скобки $(z-z_0)^n$ получим

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n}F(z), \tag{9.9}$$

где $F(z)$ — аналитическая функция, которая имеет вид:

$$F(z)=c_{-n}+c_{-(n-1)}(z-z_0)+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{n-1}+c_0(z-z_0)^n+$$
$$+c_1(z-z_0)^{n+1}+\ldots$$

Полученная дробь (9.9) несократима, так как $F(z_0)=c_{-n}\neq 0$. Итак, теорема доказана.

Определение 20. Если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, то особая точка называется существенно особой.

Примером существенно особой точки является $z=0$ для функции $e^{\frac{1}{z}}$. При приближении к существенно особой точке по различным направлениям функция стремится к различным пределам. Например, если рассмотреть $w=e^{\frac{1}{z}}$ и устремить z к нулю по положительной полуоси, т. е. $z=x\to 0$, то $e^{\frac{1}{x}}$ будет стремиться к бесконечности. Если z устремить к нулю по отрицательной полуоси, т. е. $z=-x\to 0$, то $e^{-\frac{1}{x}}$ стремится к нулю, а если z устремить к нулю по мнимой оси (сверху или снизу), т. е. $z=\pm iy\to 0$, то функция $e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{\pm iy}}=e^{\pm\frac{i}{y}}$ остается ограниченной по модулю

$$\left|e^{\pm\frac{i}{y}}\right|=1.$$

Вопросы и задачи

1. Сформулировать и доказать теорему о представлении аналитической функции степенным рядом.

2. Разложить в степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ следующие функции и найти радиус сходимости

$$\text{а) } \sin^2 z,\ \text{б) } \operatorname{ch}^2 z,\ \text{в) } \frac{1}{az+b}\ b\neq 0,\ \text{г) } \frac{z^2}{(z+1)^2}.$$

д) Найти первые 5 членов разложения в ряд по степеням z $w=e^{z\sin z}$.

3. Дать определение нуля аналитической функции.

4. Как представляется аналитическая функция в окрестности нуля?

5. Что такое полюс аналитической функции?

6. Как связаны между собой нули и полюсы?

7. В чем отличие ряда Лорана от ряда Тейлора?

8. Можно ли утверждать, что ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана?

9. Разложить в ряд Лорана

$$\text{а) } \frac{1}{z-2} \text{ в окрестности } z=0,$$

б) $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности $z=0$,

в) $e^{\frac{1}{1-z}}$ в окрестности $z=1$,

г) $\cos\frac{1}{z}$ в окрестности $z=0$.

10. Найти особые точки функций, выяснить характер особых точек (существенно особые точки или полюсы):

а) $\frac{1}{z-z^3}$, б) $\frac{z^4}{1+z^4}$, в) $\frac{z^5}{(1-z)^2}$, г) ze^{-z}, д) $\frac{1}{\sin z}$,

е) $\frac{\cos z}{z^2}$, ж) $\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$.

§ 10. ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. В этом параграфе мы введем очень важное для практических приложений понятие вычета. Роль вычетов в применениях теории функций комплексного переменного состоит в том, что они существенно облегчают вычисление контурных интегралов и некоторых типов определенных интегралов от действительных функций.

Определение 21. Вычетом функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки z_0 называется интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(c)} f(z)dz$, где c—любой контур, охватывающий z_0 и не содержащий внутри себя других особых точек. Вычет обозначается следующим образом:

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z)=\text{Выч}_{z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(c)} f(z)dz.$$

Теорема Коши о вычетах. *Если аналитическая функция имеет внутри замкнутого контура γ конечное число особых точек $z_1, z_2, \ldots z_n$, а на самом контуре особых точек нет, то*

$$\oint\limits_{(\gamma)} f(z)dz=2\pi i\{\text{Выч}_{z_1} f(z)+\text{Выч}_{z_2} f(z)+\ldots+\text{Выч}_{z_n} f(z)\}. \qquad (10.1)$$

Эту теорему можно рассматривать, как обобщение основной теоремы Коши на случай, когда внутри контура имеются изолированные особые точки.

Доказательство. Окружим особые точки $z_1, z_2, \ldots z_n$ кружками так, чтобы эти кружки не пересекались между собой и с контуром γ (рис. 24).

Тогда по основной теореме для многосвязной области интеграл по контуру γ будет равен сумме интегралов по окружностям c_i построенных кружков, т. е.

$$\oint\limits_{(\gamma)} f(z)dz=\sum_{i=1}^{n}\oint\limits_{(c_i)} f(z)dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(c_i)} f(z)dz=$$

$$=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\text{Выч}_{z_i} f(z).$$

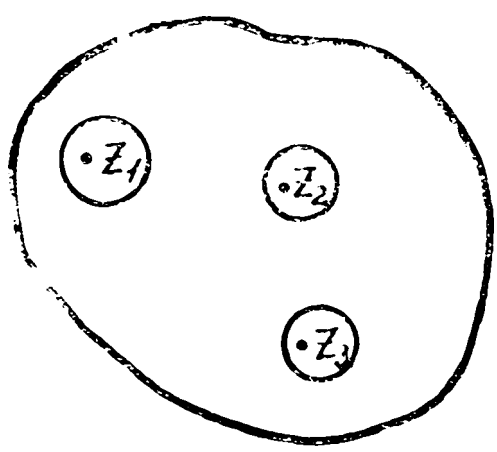

Рис. 24

Итак, теорема доказана.

II. Связь вычета с рядом Лорана. Покажем, что вычет $f(z)$ в точке z_0 равен коэффициенту c_{-1} лорановского ряда по степеням $(z-z_0)$

$$\text{Выч}_{z_0} f(z)=c_{-1}.$$

Действительно, разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в круге с центром в точке z_0

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots$$

Найдем вычет, используя это представление. По определению

$$\text{Выч}_{z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(c)} f(z)dz.$$

В качестве c выберем окружность радиуса r с центром в z_0. Имеем

$$\text{Выч}_{z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(c)}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k dz=\frac{1}{2\pi i}2\pi i c_{-1}=c_{-1}$$

(см. пример 8.2.).

Пример. 10.1. Найти $\text{Выч}_0 e^{\frac{1}{z}}$.

Имеем

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots$$

$$\text{Выч}_0 f(z)=\text{Выч}_0 e^{\frac{1}{z}}=1.$$

Пример 10.2. Найти $\text{Выч}\cos\frac{1}{z}$.

Так как

$$\cos\frac{1}{z}=1-\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{4!\,z^4}-\ldots,$$

то

$$\text{Выч}_0\cos\frac{1}{z}=0.$$

III. Вычисление вычета относительно полюса. Так как теорема Коши о вычетах позволяет свести вычисление контурных интегралов к вычислению вычетов, то полезно научиться вычислять вычеты. Последние находятся без труда в случае, когда особая точка функции есть полюс.

Пусть сначала z_0 простой полюс функции. Тогда в некотором круге с центром в z_0 имеет место разложение

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots.$$

Откуда

$$f(z)(z-z_0)=c_{-1}+c_0(z-z_0)+c_1(z-z_0)^2+\ldots$$

и, следовательно,

$$c_{-1}=\text{Выч}_{z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}f(z)(z-z_0). \tag{10.2}$$

Пример 10.3. Найти $\text{Выч}_i\frac{1}{z^2+1}$.

Имеем

$$\text{Выч}_i\frac{1}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{1}{z^2+1}(z-i)=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z-i)(z+i)}=\frac{1}{2i}.$$

Вычисление вычета еще более упрощается, если $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z_0)\neq 0$, а $\psi(z)$ имеет простой нуль при $z=z_0$ (т. е. $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$).

Тогда $z=z_0$ является простым полюсом функции $f(z)$ и по формуле (10.1) получаем

$$\text{Выч}_{z_0}f(z)=\text{Выч}_{z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)(z-z_0)}{\psi(z)}=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{10.3}$$

Пример 10. 4. Определить

$$\text{Выч}_1 \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1}.$$

По формуле (10.3) получаем

$$\text{Выч}_1 \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

В случае, когда z_0 полюс кратности $n(n>1)$, имеем в круге с центром в z_0 разложение

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots$$

Откуда

$$f(z)(z-z_0)^n = c_{-n} + c_{-(n-1)}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + \ldots .$$

Дифференцируя почленно $n-1$ раз, получим:

$$\frac{d^{n-1}[f(z)(z-z_0)]^n}{dz^{n-1}} = (n-1)!\ c_{-1} + n(n-1)\ldots 2c_0(z-z_0) + \ldots$$

и, наконец, при $z \to z_0$

$$(n-1)!\ c_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}[f(z)(z-z_0)^n]}{dz^{n-1}}$$

или

$$a_{-1} = \text{Выч}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim \frac{d^{n-1}[f(z)(z-z_0)^n]}{dz^{n-1}}. \qquad (10.4)$$

Пример 10.5. Определить вычет функции $\frac{1}{(z^2+1)^3}$ относительно точки $z=i$. Точка $z=i$ является полюсом третьего порядка данной функции, так как

$$\frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}.$$

В соответствии с (10.4) получим:

$$\text{Выч}_i \frac{1}{(z^2+1)^3} = \lim_{z\to i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3 \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}\right] =$$

$$= \lim \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{(z+i)^3} = 6\frac{1}{2^5 i} = -\frac{3i}{16}.$$

Пример 10.6. Определить $\text{Выч}_0 \frac{1}{z^2}$.

Так как $\frac{1}{z^2}$ представляет собой Лорановское разложение функции в окрестности нуля, то сразу видно, что

$$\text{Выч}_0 \frac{1}{z^2} = c_{-1} = 0,$$

ибо z^{-1} отсутствует. Заметим, что в примерах часто можно получить ответ, не привлекая порой громоздких вычислительных формул.

IV. Применение вычетов к вычислению определенных интегралов. Мы рассмотрим здесь только один случай, а именно вычисление интегралов по всей оси.

Пусть требуется вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Относительно подынтегральной функции $f(z)$ предполагается:

1) что она является аналитической в верхней (или нижней) полуплоскости за исключением конечного числа особых точек z_1, z_2, ..., z_n, причем на оси x особых точек нет,

2) $\max|f(z)|\,|z| \to 0$ при $|z| \to \infty$.

Тогда имеет место следующая формула

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \text{Выч}_{z_i} f(z). \text{ *} \qquad (10.5)$$

Доказательство. Возьмем вспомогательный контур Γ_R интегрирования, изображенный на рис. 25, где BCA полуокруж-

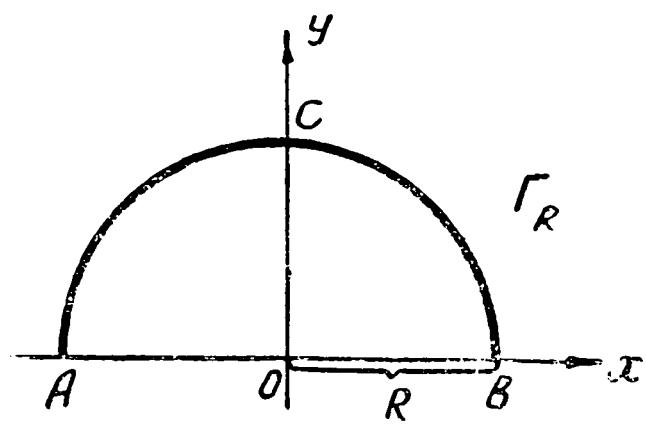

Рис. 25

ность радиуса R с центром в начале координат. Выберем радиус R столь большим, чтобы все особые точки функции $f(z)$, находящиеся в верхней полуплоскости, попали внутрь этого контура.

---

*) $\sum\limits_{\operatorname{Im} z_i > 0}$ означает, что суммирование проводится по всем особым точкам функции $f(z)$, расположенным в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Тогда

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \text{Выч}_{z_i} f(z).$$

Интеграл в левой части можно разбить на два

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{BCA} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \text{Выч}_{z_i} f(z).$$

Оценим интеграл по верхней полуокружности

$$\left| \int_{BCA} f(z)dz \right| \leqslant \max|f(z)|\pi R = \pi \max|f(z)|\,|z|.$$

Но по условию 2) $\max|f(z)|\,|z| \to 0$ при $R \to \infty$. Устремляя R к бесконечности, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \text{Выч}_{z_i} f(z).$$

Пример 10.7. Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Подынтегральная функция имеет две особые точки—полюсы $z_1 = i$ и $z_2 = -i$. В верхней полуплоскости лежит полюс $z_1 = i$. По формуле (10.5) находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \text{Выч}_i \frac{1}{(z^2+1)^2} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} = -2\pi i \frac{3}{(i+i)^3} = -\frac{6\pi i}{\gamma(-i)} = \frac{3}{4}\pi.$$

Укажем еще один тип определенных интегралов, которые можно вычислить с помощью вычетов. Пусть требуется вычислить

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x)dx \quad m > 0.$$

Относительно $f(x)$ будем предполагать следующее:

1) $f(z)$—аналитическая в верхней полуплоскости за исключением конечного числа особенностей;

2) $\max|f(z)| \to 0$, когда $|z| \to \infty$.

Чтобы применить предыдущую методику достаточно показать, что

$$\left| \int_{(c_R)} e^{imz} f(z)dz \right| \to 0 \quad \text{при } |z| = R \to \infty.$$

То что это действительно так, вытекает из леммы Жордана, формулировку которой мы приведем.

Лемма Жордана. Если $f(z)$ аналитическая в верхней полуплоскости и $\max|f(z)|\to 0$, когда $|z|\to\infty$, то

$$\int\limits_{BCA} e^{imz}f(z)dz\to 0 \quad \text{при } R=|z|\to\infty.$$

Пример 10.8. Вычислить $\int\limits_0^\infty \frac{\cos 3x\,dx}{x^2+9}$.

Преобразуем интеграл так, чтобы можно было применить лемму Жордана

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos 3x}{x^2+9}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x dx}{x^2+9}=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3ix}dx}{x^2+9}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Re}2\pi i\,\text{Выч}_{3i}\,\frac{e^{3it}}{z^2+9}=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{2\pi ie^{-9}}{6i}=\frac{\pi e^{-9}}{6}.$$

Пример 10.9. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{(x^2+1)(x^2+25)}$.

Преобразуем этот интеграл так, чтобы можно было применить лемму Жордана

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{(x^2+1)(x^2+25)}=\operatorname{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}dx}{(x^2+1)(x^2+25)}=$$

$$=\operatorname{Im}2\pi i\left[\text{Выч}_i\,\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+25)}+\text{Выч}_{5i}\,\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+25)}\right]=$$

$$=\operatorname{Im}2\pi i\left[\frac{ie^{-1}}{24\cdot 2i}+\frac{5ie^{-5}}{-24\cdot 2\cdot 5i}\right]=\frac{\pi}{24}\left(e^{-1}+\frac{1}{5}e^{-5}\right).$$

Вопросы и задачи

1. Дать определение вычета.
2. Сформулировать и доказать теорему Коши о вычетах.
3. Вывести формулы для вычисления вычетов: а) относительно простого полюса; б) относительно полюса порядка n.
4. Найти вычеты относительно особых точек

$$\text{а) } \frac{1}{z^3-z^5},\ \text{б) } \frac{1}{z(1-z^2)},\ \text{в) } \operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\ \text{г) } \frac{1}{\sin z},$$

$$\text{д) } \cos\frac{2}{z^2},\ \text{е) } \sin\frac{1}{z}.$$

5. Вычислить интегралы, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении

$$\text{а)}\quad \oint\limits_{(c)} \frac{dz}{z^4+1} \qquad c:\ x^2+y^2=2x;$$

$$\text{б)}\quad \oint\limits_{(c)} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2} \qquad c:\ |z-2|=\frac{1}{2}.$$

6. Найти определенные интегралы

$$\text{а)}\quad \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} \quad (a>1).$$ Указание: положить $e^{i\varphi}=z$;

$$\text{б)}\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1x+13)^2};\quad \text{в)}\quad \int\limits_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2};\quad \text{г)}\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4xdx}{(x^2+4)(x^2+1)};$$

$$\text{д)}\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin xdx}{x^2-2x+10};\quad \text{ж)}\quad \int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}$$ (a и b—действительные числа)

§ 11. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА

В некоторых приложениях большой интерес представляет решение следующего вопроса: имеет ли данная аналитическая функция $f(z)$ нули или полюсы внутри фиксированного контура l? К сожалению, ответ на этот вопрос получить в общем случае невозможно. Однако можно довольно простыми соображениями определить разность между числом нулей и полюсов внутри контура. В некоторых конкретных случаях это оказывается достаточным. Ограничиваясь случаем рациональных функций, приведем здесь решение этого вопроса. Начнем с простейших рациональных функций.

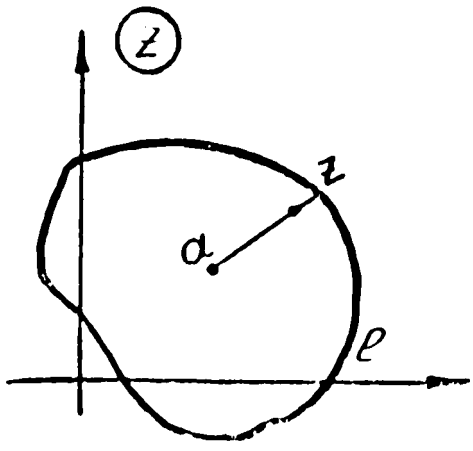

Рис. 26

Рассмотрим функцию $w=z-a$. Заставим точку z обойти контур l. При этом возможны два случая 1) точка a не лежит внутри контура l. При этом обходе w вернется к прежнему значению. 2) Пусть теперь z обойдет контур l, содержащий внутри себя точку a, и вернется в исходное положение (рис. 26). При этом аргумент w получит приращение 2π. Результат запишем следующим образом

$$\Delta_l \arg w=2\pi.$$

Далее рассмотрим функцию $w=(z-a)^n$ выясним, как изменится аргумент w при обходе контура l с точкой a внутри. Так как

$$\arg(z-a)^n=n\arg(z-a),$$

то

$$\Delta_l \arg(z-a)^n = 2\pi n.$$

Это значит, что в плоскости w конец вектора $w=(z-a)^n$ n раз обходит начало координат, если в плоскости z конец вектора z обходит контур l с точкой a внутри. Если взять функцию $w=\frac{1}{z-a}$, то при обходе точкой z контура l аргумент w получит приращение -2π. Это видно из того, что

$$\arg w = -\arg(z-a).$$

Предположим, что дана функция

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ многочлены.

На плоскости z нарисуем замкнутый контур l, не проходящий через нули $P(z)$ и $Q(z)$ (рис. 27). Предположим, что точка z обой-

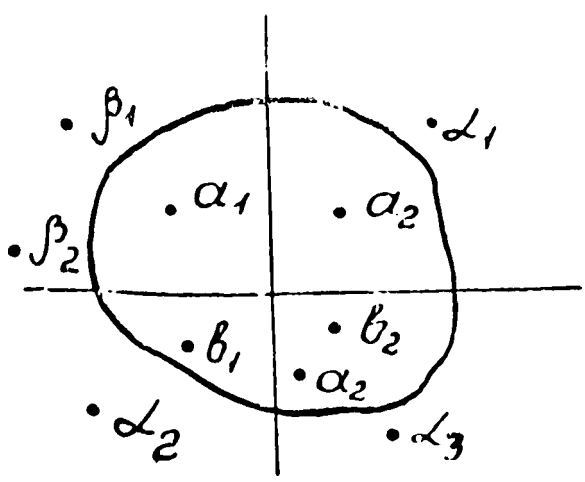

Рис. 27

дет контур l и вернется в исходное положение. Поставим вопрос, сколько раз точка w обойдет начало координат в плоскости w? Другими словами, какое приращение получит $\arg f(z)$ при обходе точной z контура l?

Пусть многочлен $P(z)$ имеет внутри контура нули

a_1 кратности n_1,

a_2 кратности n_2,

. . . . . .

a_r кратности n_r;

и вне контура

α_1 кратности ν_1,

α_2 кратности ν_2,

. . . . . .

α_ρ кратности ν_ρ.

Обозначим нули знаменателя $Q(z)$ внутри контура l

b_1 кратности p_1,

b_2 кратности p_2,

. . . . . .

b_s кратности p_s:

и вне контура

β_1 кратности π_1,

β_2 кратности π_2,

. . . . . .

β_σ кратности π_σ.

Заметим, что нули знаменателя — это полюсы функции $f(z)$.

Для решения поставленной задачи разложим числитель и знаменатель на множители

$$f(z)=\frac{A(z-a_1)^{n_1}\ldots(z-a_r)^{n_r}(z-\alpha_1)^{\nu_1}\ldots(z-\alpha_\rho)^{\nu_\rho}}{B(z-b_1)^{p_1}\ldots(z-b_s)^{p_s}(z-\beta_1)^{\pi_1}\ldots(z-\beta_\sigma)^{\pi_\sigma}}.$$

Тогда

$$\Delta_l \arg f(z)=2\pi[n_1+n_2+\ldots+n_r-(p_1+p_2+\ldots+p_s)]$$

или

$$\Delta_l \arg f(z)=2\pi(N-P).$$

Это соотношение называется *принципом аргумента.* Оно означает, что изменение аргумента функции $f(z)$ при обходе замкнутого контура l в положительном направлении равно величине $2\pi\ (N-P)$, где N — число нулей функции $f(z)$, а P — число полюсов этой функции, попавшие внутрь контура (l), включая их кратность.

Пример 11.1. Найти приращение аргумента функции $f(z)=\frac{z^2-2z+1}{z^2-10z+24}$ при обходе в положительном направлении точкой z окружности: $|z-4|=1$. Разложим числитель и знаменатель функции $f(z)$ на множители:

$$f(z)=\frac{(z-1)^2}{(z-4)(z-6)}.$$

Так как внутрь окружности попадает лишь полюс $z=4$, то имеем

$$\Delta \arg f(z)=-2\pi.$$

Вопросы и задачи

1. В чем заключается принцип аргумента?
2. Как сформулировать принцип аргумента для многочлена?

3. Найти приращение аргумента функции

$$f(z)=\frac{z^2-5z+6}{z^2+1}$$

при обходе точкой z окружности:

а) $|z+i|=1$,

б) $|z-4|=3$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Для внутриведомственной продажи цена 48 коп.

Литературный редактор Мурашова Л. Я.
Технический редактор Печурова Г. К.
Корректор Королева Л. Л.

Сдано в набор 20.6.64. Подп. к печ. 10.10.64. Г—416067.
Бумага $60 \times 90^1/_{16}$ Печ. лист. 4. Зак. 513т
Типография АРТА

Список опечаток

№ стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
1	2	3	4
7	3 снизу	Сходится абсолютно	Сходится
10	2 снизу	$(0,2\pi)$	$[0,2\pi)$
12	8 снизу	Существование предела	Существование ненулевого предела
12	1 снизу	определения функций	определения для функций
12	Рис. 5.		Следует поменять местами обе половинки рисунка
16	10 сверху	$v=(x, y)$	$v(x, y)$
17	11 снизу	Пример 3.6	Пример 3.5
18	8 сверху	длина	длине
18	7 снизу	ной, на	ной к
21	1 сверху	Так что справедлив	Справедлив
22	4 снизу	числом	числом:
24	12 снизу	находим	Находим
25	11 сверху	области сходимости	кругу сходимости
27	9 сверху	$z=\alpha$	$z=\alpha$;
29	4—5 сверху	$1+\lvert z\rvert+\ldots+\lvert r''\rvert+\ldots$	$1+r+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\ldots$
29	19 сверху	(6.7)	(6.4)
30	12 снизу	$e^{z'}$	$(e^z)'$
36	19 сверху	При $\alpha=\frac{1}{n}$ можно	Можно
41	4 сверху	вид z	вид:
41	12 сверху	A	D
43	11 сверху	определенный	сходящийся
43	9 снизу	любой	этой
43	2 снизу	голоморфна	аналитична
44	9 сверху	$\oint\limits_{(c_\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$	$\oint\limits_{(c_\varepsilon)} \frac{f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta$
44	4 снизу	(8.10)	(8.11)
45	7 снизу	. Если	, если
45	5 снизу	основной смысл интегральной формулы	интегральная формула
46	11 снизу	$\lvert z-\alpha\rvert=R$	$\lvert\zeta-a\rvert=R$ из круга аналитичности
47	3 сверху	$\frac{1}{(\zeta-\alpha)^{n\mp 2}}$	$\frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}$
47	5 сверху	$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\eta)^{n+1}}$	$\frac{f(\zeta)(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}$
47	7 сверху, 7 снизу	$\int\limits_{c_k}$	$\int\limits_{c_R}$
48	4 сверху	$\frac{}{z+1}$	$z+1$
48	8 снизу	$(z-z_0)^n$	$(z-z_0)^n+\ldots$
49	11 сверху	представляет	представляется
49	13 сверху	есть функция	есть нуль функции
49	16 сверху	если она	если z_0
49	17 сверху	то функция	то говорят, что функция

1	2	3	4
49	2 снизу	т. е.	и
50	10 сверху	$\frac{a_0}{(z-z_0)^n}=\frac{a_1}{(z-z_0)^{n+1}}$	$\frac{a_0}{(z-z_0)^n}+\frac{a_1}{(z-z_0)^{n-1}}$
51	5 снизу	$(z-z_0)^n$ получим	$(z-z_0)^n$; получим:
52	8 сверху	функция стремится	функция может стремиться
54	1—2 сверху	интервал	интеграл
56	9 снизу	a_{-1}	c_{-1}
58	1 снизу	$\int\limits_{c_R}$	$\int\limits_{BCA}$
60	11 снизу	w	$\arg w$
62	13 снизу	попавшие	попавших
62	13 снизу	включая	с учетом

К зак. 513

Продаже не подлежит
УДК 517.53(075.8)
К—43